EUCLIDES

Maandblad voor
de didactiek
van de wiskunde

Orgaan van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren
van Liwenagel
en van
de Wiskunde-
werkgroep
van de w.v.o.

45e jaargang
1969/1970
no 10
juli 1970

Wolters-Noordhoff

EUCLIDES

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren, van Liwenagel en van de Wiskundewerkgroep van de W.V.O.
Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Secretaris: Drs. J. W. Maassen, Traviatastraat 132, Den Haag.
Penningmeester: Drs. J. van Dormolen, Karel Doormanlaan 50, Oegstgeest. Postrekening nr. 143917 t.n.v. de Vereniging van Wiskundeleraren te Amsterdam.
De contributie bedraagt *f* 9,00 per jaar.
Adreswijzigingen, opgave van nieuwe leden aan de secretaris.

Liwenagel

Leden van Liwenagel kunnen zich op Euclides abonneren door aanmelding bij de penningmeester: Dr. C. P. Koene, Willem Klooslaan 20, Heemstede, postrekening t.n.v. Liwenagel nr. 87185.

Wiskundewerkgroep van de W.V.O.

Leden van de groep kunnen zich abonneren op Euclides door aanmelding bij de secretaris: Drs. H. C. Vernout, van Nouhuysstraat 11, Haarlem (N), postrekening 261036 t.n.v. de penningmeester te Voorburg.

Artikelen ter opname worden ingewacht bij G. Krooshof, Dierenriemstraat 12, Groningen, tel. 050-772279.

Boeken ter recensie aan Dr. W. A. M. Burgers, Prins van Wiedlaan 4, Wassenaar, tel. 01751-3367.

Mededelingen, enz. voor de redactie aan Drs. A. M. Koldijk, Johan de Wittlaan 14, Hoogezand, tel. 05980-3516.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan Dr. A. J. E. M. Smeur, Prins Alexanderlaan 13, Breda.

Abonnementsprijs voor niet-leden *f* 10,50. Hiervoor wende men zich tot: Wolters-Noordhoff N.V., Groningen, Postbus 58.

Der Geschichtete Rhythmus in der Ebene, die Formleiter einer Lichtmusik [1]

REINHARD LEHNERT

6638 Dillingen/Saar, Nordallee 12

Gauß hat sich öfter gegen uns geäußert, daß Archimedes der Mann des Altertums gewesen sei, den er am höchsten schätze, ... nur könne er ihm nicht verzeihen, daß er bei seiner Sandrechnung das decadische Zahlensystem nicht gefunden habe. 'Wie konnte er das übersehen', sagte er bewegt, 'und auf welcher Höhe würde sich jetzt die Wissenschaft befinden, wenn Archimedes jene Entdeckung gemacht hätte.'

Sartorius von Waltershausen, 'Gauß zum Gedächtnis', 1856, S. 84 – zitiert nach Wilhelm Ahrens, 'Scherz und Ernst in der Mathematik', Leipzig 1904, S. 284.

Ich habe erkannt, daß es der Rhythmus ist, der den Dingen, die an sich ohne Halt sind und ohne eigene Bedeutung, Wirklichkeit verleiht.

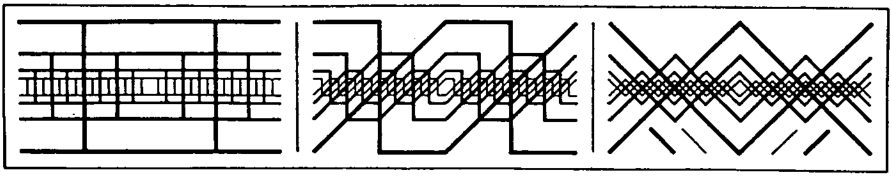
Rabindranath Tagore.

Der vorliegende Aufsatz nimmt das Thema früherer Aufsätze (Literaturverzeichnis [1]–[10]) wieder auf, ist aber auch für sich alleine verständlich. Die Aufsätze behandeln – meines Wissens erstmalig – die Überdeckungen der euklidischen Ebene mit geschichtet-rhythmischen, das heißt n-adischen ($n = 2, 3, 4, \ldots$) Punktgittern und zugehörigen Liniennetzen. Weiter die Verwandlungen dieser Liniennetze oder 'All-Sterne' über die 'Voll-Sterne' in die zugehörigen 'Innensterne'. Weiter die Benutzung der Innensterne als Raster zur Herstellung von 'Innenbildern' und 'Innenspielen'.

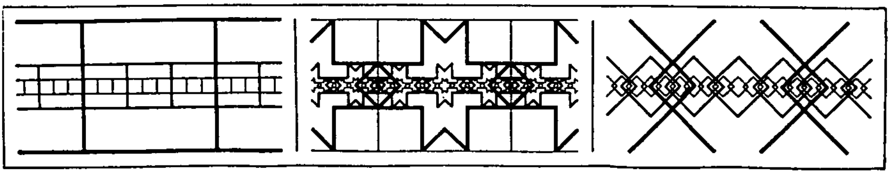
Die Innensterne sind die geschichteten Flächenornamente, die einige naheliegende Bedingungen erfüllen. Sie machen die Punkte der Ebene 'zeigbar' in derselben Ordnung, in der die kartesischen Koordinatensysteme mit n-adischer Ordnung der Koordinaten sie 'nennbar' machen. Sie leisten dies unter Ausnützung einiger grundlegenden Gesetze der Ebene und des Sehens, insbesondere des Überschneidungsgesetzes des Gestaltsehens. Sie sind die – einzig möglichen – guten sichtbaren Darstellungen der Koordinatensysteme. Sie begründen über ihre Bilder und Spiele eine 'Ästhetische Geometrie' und darüber hinaus eine 'Lichtmusik'.

Eine 'Lichtmusik' ist eine Kunst gegenstandsfreier Filme, die für das Auge das gleiche leistet wie die Tonmusik für das Ohr. Die Innensterne sind die einzig möglichen Formleitern einer solchen Lichtmusik. Das folgt daraus, daß eine solche Formleiter sowohl – zumindest in schichtenweiser Näherung – gleichförmig oder homogen, das heißt an allen Stellen gleich beschaffen, als auch ganzheitlich sein muß. (Die Gleichförmigkeit ist eine Grundeigenschaft des Raumes, der Ebene und der Geraden. Die Ganzheitlichkeit ist eine Grundeigenschaft des selbständigen ästhetischen Gebildes, insbesondere des Kunstwerkes.) Zur Unterscheidung von der Lichtmusik wollen wir alle Bemühungen

---



TEXTBILD 1a: Drei sichtbare Darstellungen der 2-adisch-rationalen Zahlen.



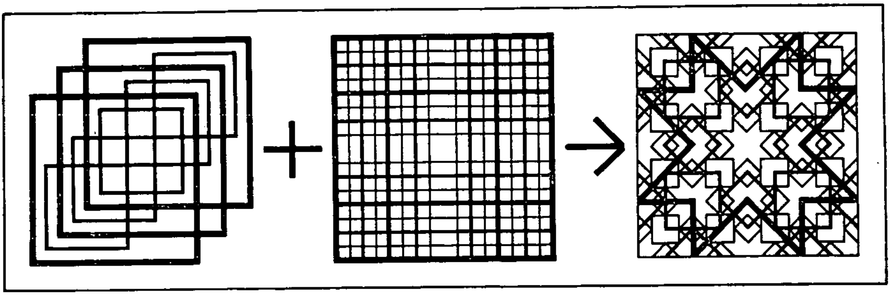
TEXTBILD 1b: Drei sichtbare Darstellungen der 3-adisch-rationalen Zahlen.

um gegenstandsfreie bewegte Bilder, die nicht auf geschichteten Flächenornamenten aufbauen, zur 'Lichtkinetik' rechnen.

Die Lichtmusik steht der Lichtkinetik gegenüber wie die gegenstandsgebundene Grafik, Malerei und Plastik der gegenstandsfreien (Piet Mondriaan, Wassily Kandinsky, Konstruktivisten, Tachisten und andere). Oder wie die tonleitergebundene (aber nicht notwendig 'tonale') Musik der tonleiterfreien 'Geräuschmusik'. Oder wie die sprachgebundene Dichtung der Logik-freien reinen Satz-, Wort-, Silben- oder Lautdichtung. Wir wollen die vier jeweils zuerst genannten Künste, die an strenge und allgemeinverbindlich vorliegende, 'naturgegebene' oder 'gewachsen kulturgegebene' Raster gebunden sind, die 'klassischen Grundkünste' nennen ('Grundkünste' im Gegensatz zu den spezielleren 'Einzelkünsten' und den 'gemischten Künsten'). Wir wollen die jeweils an zweiter Stelle genannten Künste die 'Parallelkünste 'nennen, da sie den erstgenannten in gewissem Sinne zwar nicht vom 'Raster' her, wohl aber vom 'Material' her 'parallel' laufen'.

Die angestrebte Lichtmusik ist, wie gesagt, eine Schwester-Kunst zur Tonleitergebundenen Musik, nicht zur Geräusch-Musik. Sie ist nach der besprochenen sachgemäßen Einteilung eine 'klassische Kunst'. (Daß sie ganz neu ist und mit modernsten technischen Mitteln arbeitet, steht hierzu nicht im Widerspruch.) Sie ist daher von der Problematik der 'Parallelkünste' nicht betroffen. Wir brauchen uns also hier um diese Problematik (glücklicherweise) nicht zu kümmern. Anders steht es um die nur unbewegte Bilder schaffende 'statische Lichtmusik'. Ich vermute, daß diese nur bei Gestaltung gegenständlicher Themen den Charakter einer 'klassischen Kunst' annimmt, will mich aber in dieser Frage nicht festlegen.

Es werden aufgefordert, zur Verwirklichung der geplanten Lichtmusik beizutragen: die Mathematiker (zunächst Untersuchung der Voll-Sterne und der Gesamtheiten der zugehörigen Innensterne etwa mit den Mitteln der Kom-

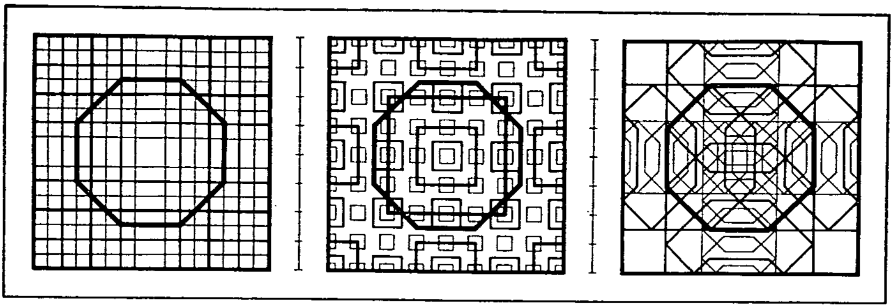


TEXTBILD 2: Der Grundgedanke des Innensternes: Zellenrand-Änderungen in geschichteten Quadratnetzen (oder Sechsecknetzen) unter Ausnützung des Überschneidungsgesetzes des Gestaltsehens ergeben die Innensterne.

binatorik, der kombinatorischen Topologie und der Graphentheorie, sodann Untersuchung der möglichen Innenbilder und -spiele, unter anderem also der möglichen 'geschichteten Matrizen' über strukturierten Farbenmengen), die Lehrer der Mathematik und der Bildenden Kunst (Nutzbarmachung der Innensterne und -bilder für den Unterricht), die Papierwaren-Industrie (Herstellung von Rasterpapieren), die Elektronische Industrie (Herstellung von 'Licht orgeln'), die Künstler (Gestaltung künstlerischer Innenbilder und -spiele), weiter Zeitschriften, Buch- und Schulbuch(!)-Verlage, Film und Fernsehen, insbesondere Farbfilm und Farbfernsehen.

Das *Bild* 1 zeigt ein geschichtetes quadratisches Punktgitter der Verkleinerungszahl (1/2). Wir führen Parallelkoordinaten ein. Der Mittelpunkt des Bildes ist der Punkt (0; 0), der Mittelpunkt der rechten Seite ist der Punkt ((1/2); 0). Wir nennen für $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ alle Punkte, deren beide Koordinaten ganzzahlige Vielfache von $(1/2)^n$ sind, die 'Kraftpunkte der Schicht n'. Jeder Kraftpunkt einer Schicht n ist also zugleich auch Kraftpunkt aller feineren Schichten $(n+1)$, $(n+2)$, ... Das Bild 1 zeigt 1 Kraftpunkt der Schicht 0, und zwar den Punkt (0; 0), der als einziger Punkt zugleich auch allen gröberen Schichten, also den Schichten -1, -2, ... angehört. Das Bild zeigt weiter $(2+1)^2 = 9$ Kraftpunkte der Schicht 1, $(4+1)^2 = 25$ der Schicht 2, $(8+1)^2 = 81$ der Schicht 3 und $(16+1)^2 = 289$ der Schicht 4.

Wir nennen für $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ eine Gerade, die zwei Kraftpunkte der Schicht n verbindet, eine 'Kraftlinie der Schicht n'. Das *Bild* 3 zeigt für die Steigungen 0, ∞, 1, -1 die Kraftlinien der Schichten 0, 1, 2, 3, 4. Man beachte, daß die schrägen Kraftlinien durch etwas dünnere Stäbe dargestellt sind als die senkrechten und die waagerechten derselben Schicht! Man beachte weiter, daß die Stäbe, deren Kraftlinien mit den Rändern des Bildes zusammenfallen, nur mit halber Dicke erscheinen! Die Kraftlinien selbst sind natürlich mathematische, also unendlich dünne Linien. Das *Bild* 4 zeigt alle Kraftlinien des Bildes 3, soweit diese nicht mit Kraftlinien einer gröberen Schicht zusammenfallen. Wir sagen auch, soweit diese sich (beim Fortschreiten von gröberen zu feineren Schichten) 'in neuer Lage' befinden.



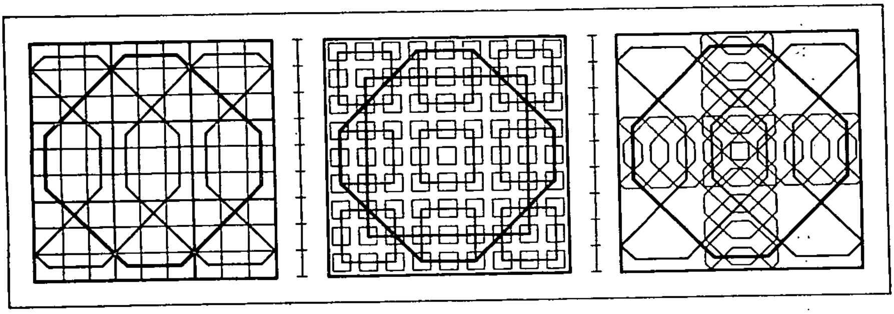
TEXTBILD 3: Der Achteck-Überlappungs-Raster zu Bild 9.

Das *Bild* 2 zeigt für die Steigungen 0 und ∞ die Kraftlinien der Schichten 1, 2, 3, 4, 5, soweit diese sich 'in neuer Lage' befinden. Die dargestellte Form ist das 'geschichtete Quadratnetz' der Verkleinerungszahl (1/2). Wir nennen ihre Quadrate die 'Zellen' des Netzes oder die 'Herrschaftsbereiche' der ihre Mittelpunkte markierenden Kraftpunkte. Aus den geschichteten Quadratnetzen und den geschichteten regelmäßigen Sechsecknetzen entstehen durch geeignete gleiche beziehungsweise ähnliche Veränderungen der Zellenränder alle möglichen Innensterne.

Das *Bild* 7 zeigt die Schichten 0–3 eines Innensternes der Verkleinerungszahl (1/2). Wir denken uns die übrigen Schichten entsprechend gebildet. Alle hier durch Stäbe dargestellten Linien sind wieder als mathematisch unendlich dünne Linien zu verstehen. Die Netzlinien einer jeden Schicht n ($n = 0, \pm 2, \pm 3, \ldots$) bestehen aus Teilstrecken von Kraftlinien der Schicht ($n+2$) 'in neuer Lage'. Der Leser prüfe dies mit Hilfe des Bildes 4 nach! So ist gesichert, daß nirgends Teilstrecken verschiedener Schichten zusammenfallen. Anders gesagt, daß die Netzlinien verschiedener Schichten immer nur isolierte Punkte gemeinsam haben.

Die Grundfiguren sind acht-Zacken-Sterne. Sie entstehen aus den Zellen des im Bild 2 dargestellten geschichteten Quadratnetzes durch das Herausschneiden von je vier Quadraten an den Ecken und von je vier Dreiecken an den Seitenmitten. Die Sterne, deren Mittelpunkte auf dem Rand des Bildes liegen, sind nur zur Hälfte beziehungsweise zu einem Viertel sichtbar. Je zwei nach oben-unten oder nach rechts-links benachbarte Sterne berühren einander in einzelnen Punkten (in unserem Falle in je zwei Punkten). Wir nennen einen solchen Innenstern einen 'Punkt-Berührungs-Raster'. Wir nennen einen Innensterne, dessen Grundfiguren ihre Nachbarn in ganzen Strecken berühren, einen 'Strecken-Berührungs-Raster'. Solche liegen vor zum Beispiel in den geschichteten Quadratnetzen der Verkleinerungszahlen ($1/n$) mit $n = 2, 4, 6, \ldots$

Die Lückenflächen der genannten Sterne sind Quadrate und Rauten (in unserem Falle auf der Spitze stehende Quadrate). Sie bilden um jeden der Sterne einen Ring aus vier Quadraten und vier Rauten. Je zwei nach oben-unten oder nach rechts-links benachbarte solche Ringe haben je zwei Quadrate und



TEXTBILD 4: Der Achteck-Überlappungs-Raster zu Bild 10.

eine Raute gemeinsam. Je zwei schräg benachbarte solche Ringe haben ein Quadrat gemeinsam. Wir können das Bild 7 auch auffassen als Darstellung eines Innensternes, dessen Grundfiguren die genannten Ringe sind. Wir nennen einen solchen Innenstern, in dem jede Grundfigur mit jedem ihrer Nachbarn nach oben, unten, rechts und links mindestens ein abgegrenztes Flächenstück gemeinsam hat, einen 'Verknüpfungs-Raster'.

Wir können das Bild 7 auch auffassen als Darstellung eines Innensternes, dessen Grundfiguren aus den oben genannten acht-Zacken-Sternen entstehen, wenn jeder von ihnen um die oben, unten, rechts und links angrenzenden Rauten vergrößert wird. Die neuen Grundfiguren sind vier-Zacken-Sterne, die ihre vier Nachbarn in Teilflächen überlappen, und zwar in den genannten Rauten. Wir nennen einen Innenstern, dessen Grundfiguren ihre Nachbarn in nicht-gesonderten Flächenstücken überlappen, einen 'Überlappungs-Raster'.

So gehören zum Linienraster des Bildes 7 verschiedene Flächenraster. Im folgenden wird, wenn wir von einem 'Innenstern' sprechen, jeweils aus dem Zusammenhang hervorgehen, ob wir einen Linien- oder einen Flächenraster meinen.

Das *Bild* 8 zeigt für den besprochenen Verknüpfungsraster die Grundfigur der Schicht 1 mit dem Mittelpunkt (0; 0). Es zeigt weiter einen 'Leitraster' aus lauter Quadraten. Dieser ist ein gutes Hilfsmittel beim Entwerfen und Zeichnen von Innensternen und Innenbildern, ist aber selbst kein brauchbarer Innenstern. Ihm fehlt, da benachbarte Grundfiguren keine gemeinsamen Punkte haben, der Zusammenhang in den einzelnen Schichten.

Das Bild 5 zeigt für den besprochenen Berührungsraster eines seiner zahllosen möglichen Innenbilder in Schwarz-Weiß. Das Bild zeigt die Grundfigur der Schicht 0, 5 Grundfiguren der Schicht 1, 9 Grundfiguren der Schicht 2, die ein großes L (links und unten) bilden, 22 Grundfiguren der Schicht 3, die ein großes M bilden, 169 Grundfiguren der Schicht 4, die die stilisierte Schrift 'Licht-Musik' sowie vier einrahmende Stäbe bilden, und 149 Grundfiguren der Schicht 5, die Schmuckreihen bilden. Der Farbenraster ist der einfachste unter allen möglichen. Er besteht aus den beiden 'Farben' Schwarz und Weiß und den Additionsgesetzen: Schwarz + Schwarz = Schwarz, Schwarz + Weiß = Weiß,

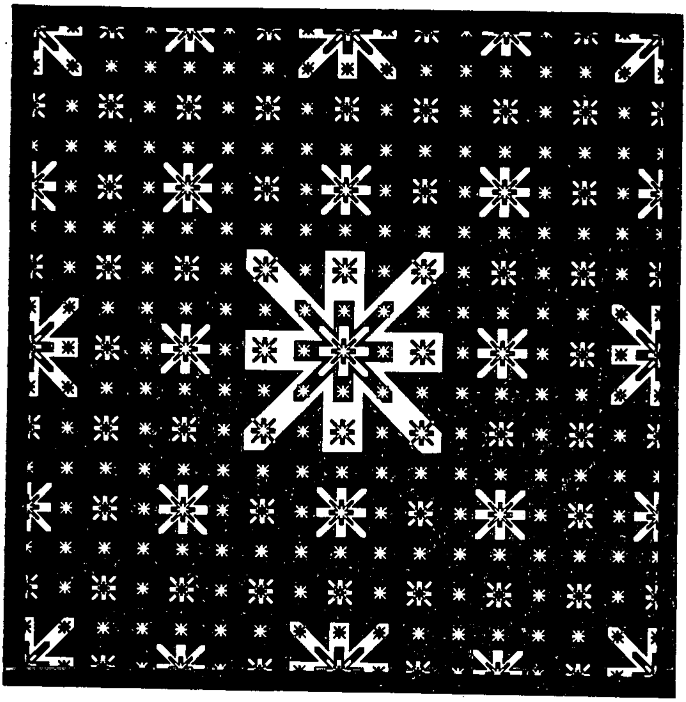


BILD 1: Das geschichtete Punktgitter der Verkleinerungszahl (1/2).

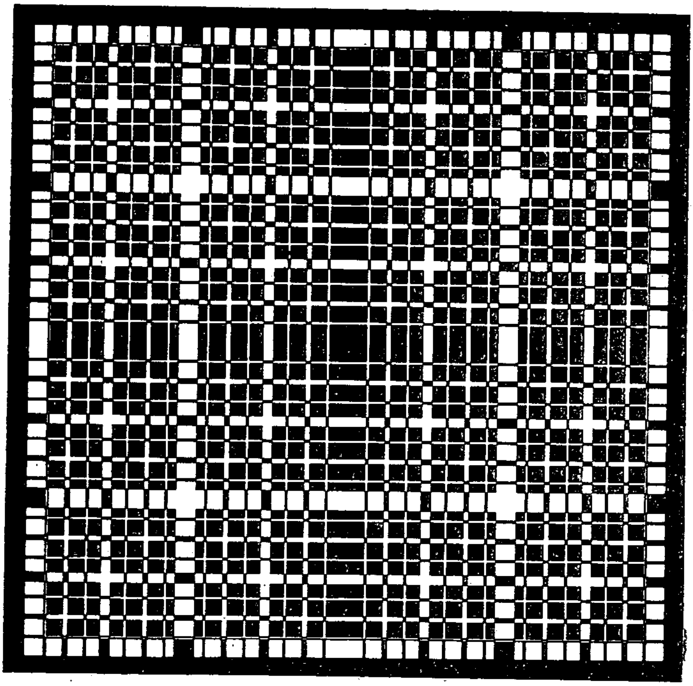


BILD 2: Das geschichtete Quadratnetz der Verkleinerungszahl (1/2).

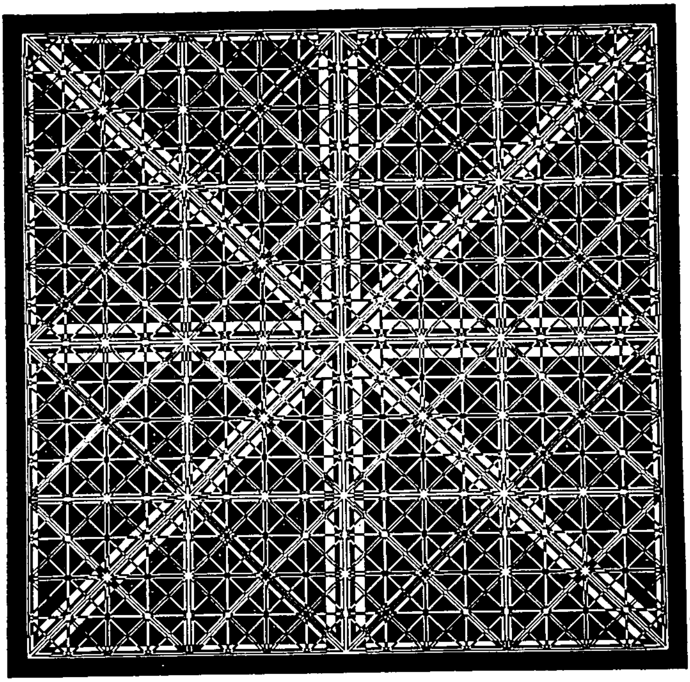


BILD 3: Ein 'All-Raster' der Verkleinerungszahl (1/2).

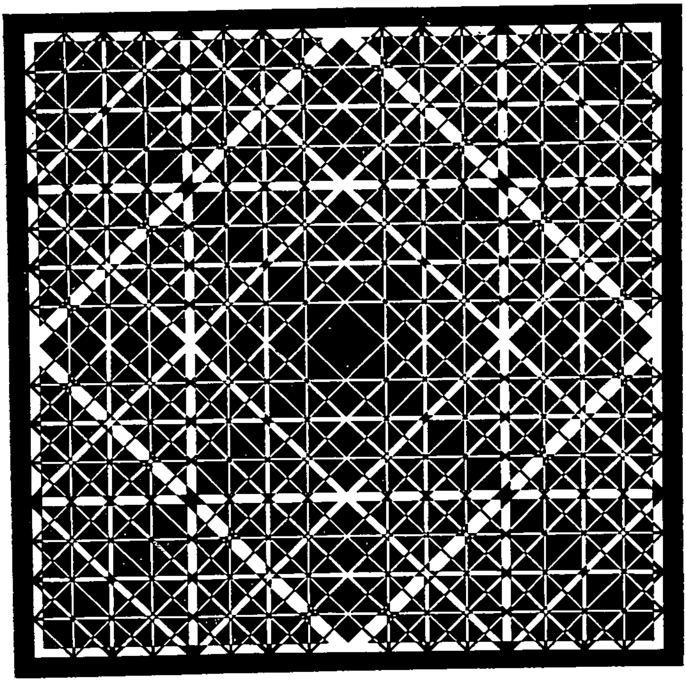


BILD 4: Der dem Raster des Bildes 3 zugeordnete 'Voll-Raster'.

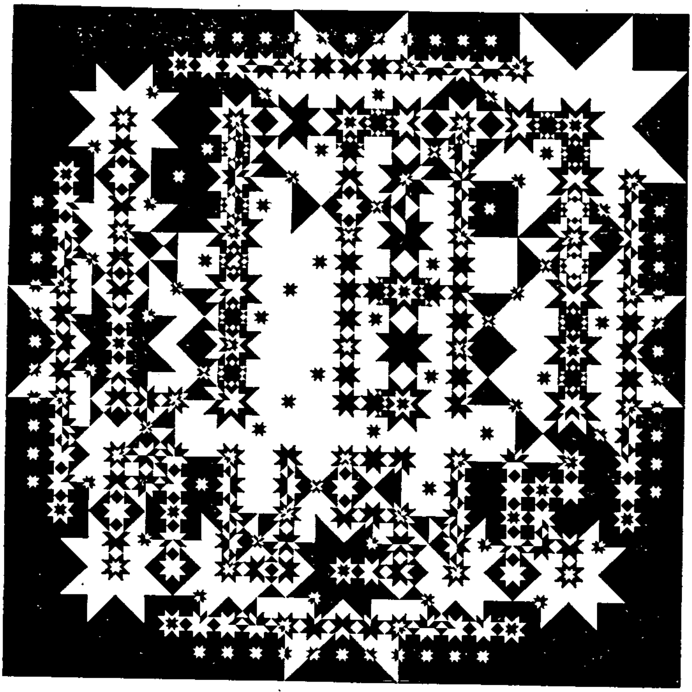


BILD 5: Ein Innenbild eines im Bild 7 dargestellten Berührungs-Rasters.

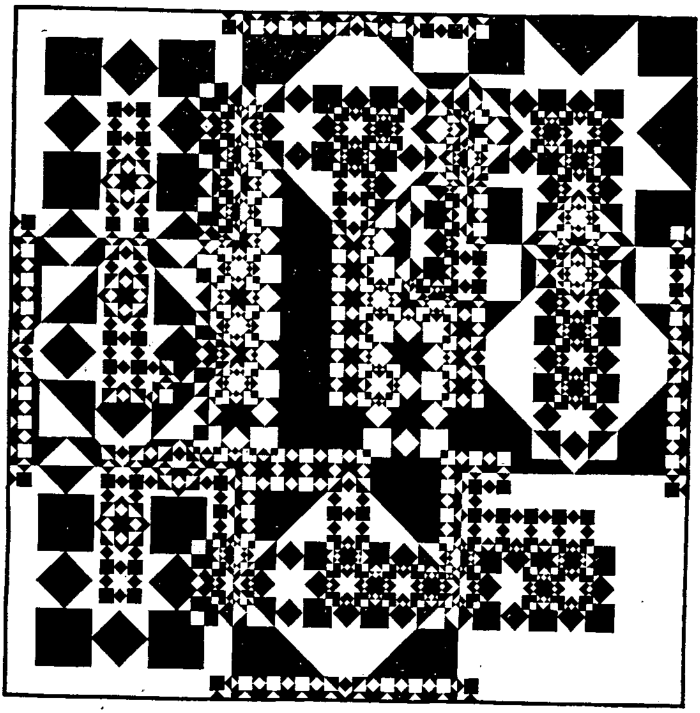


BILD 6: Ein Innenbild eines im Bild 7 dargestellten Verknüpfungs-Rasters.

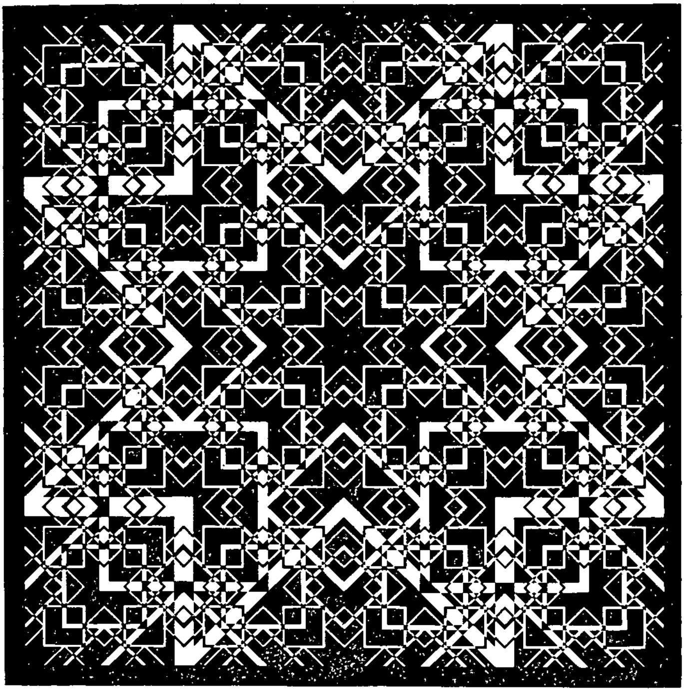


BILD 7: Die Schichten 0–3 eines Innensternes der Verkleinerungszahl (1/2).

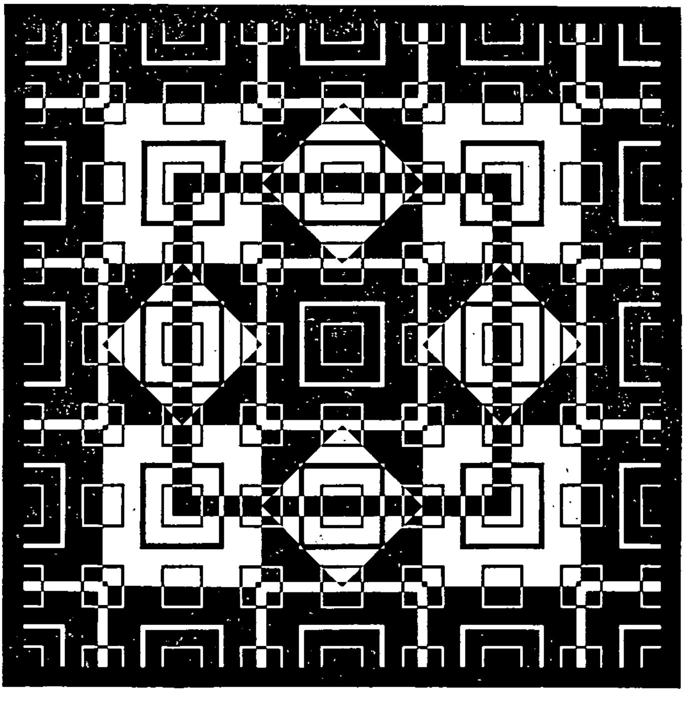


BILD 8: Eine Grundfigur des Rasters von Bild 6 auf 'Leitraster'.

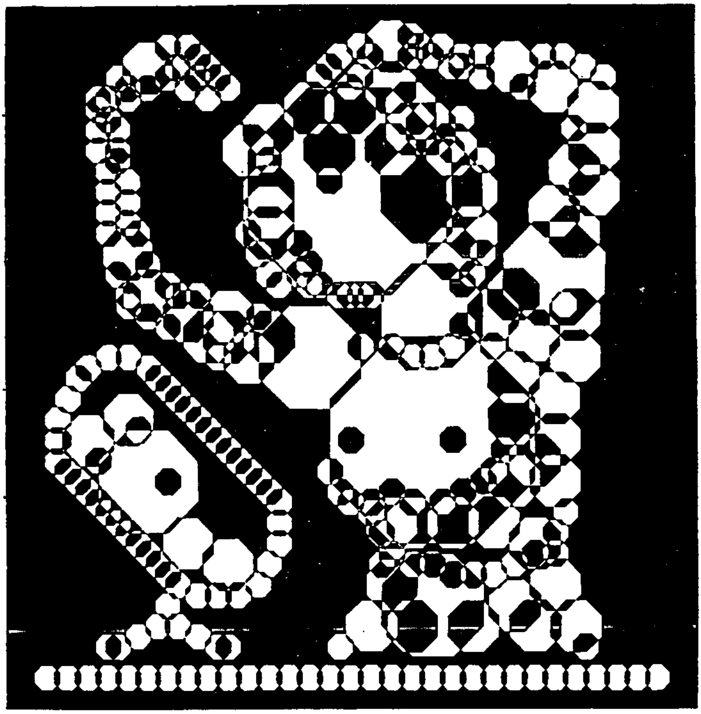


BILD 9: Ein Innenbild des im Textbild 3 dargestellten Rasters.

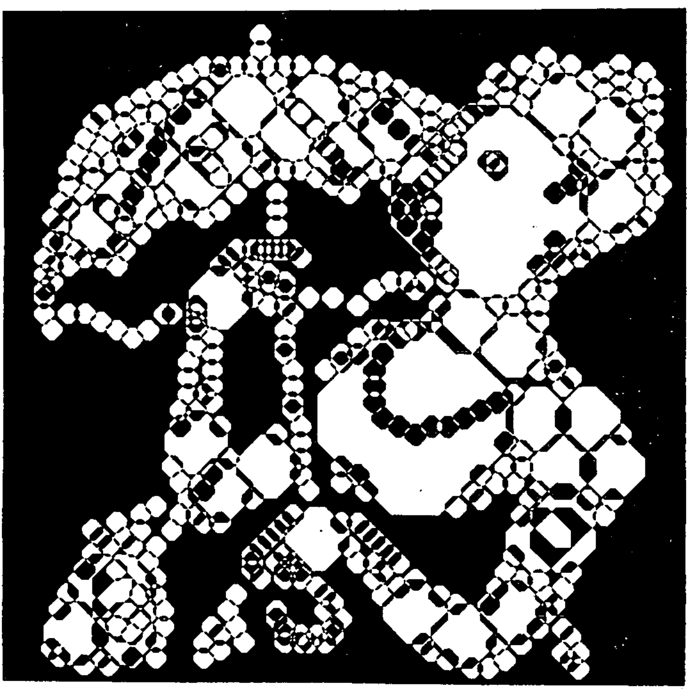


BILD 10: Ein Innenbild des im Textbild 4 dargestellten Rasters.

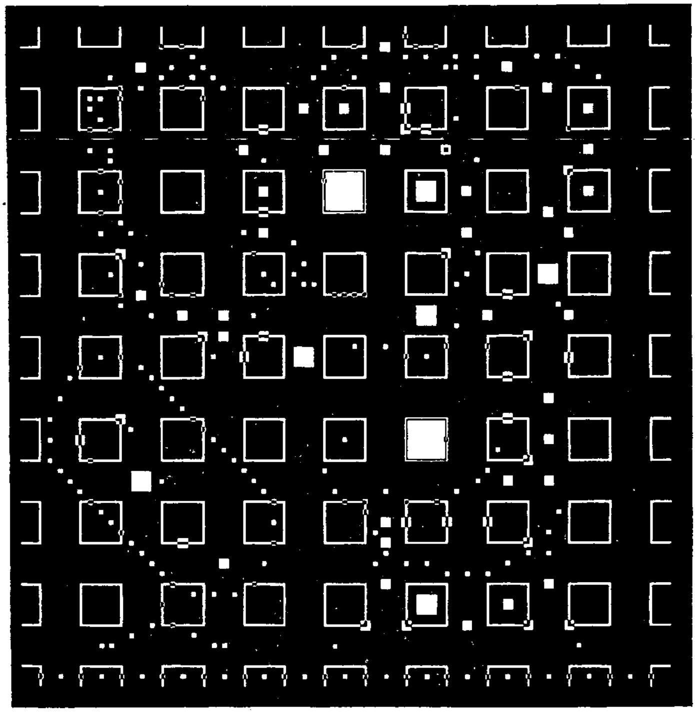


BILD 11: Der 'Plan' zum Bild 9.

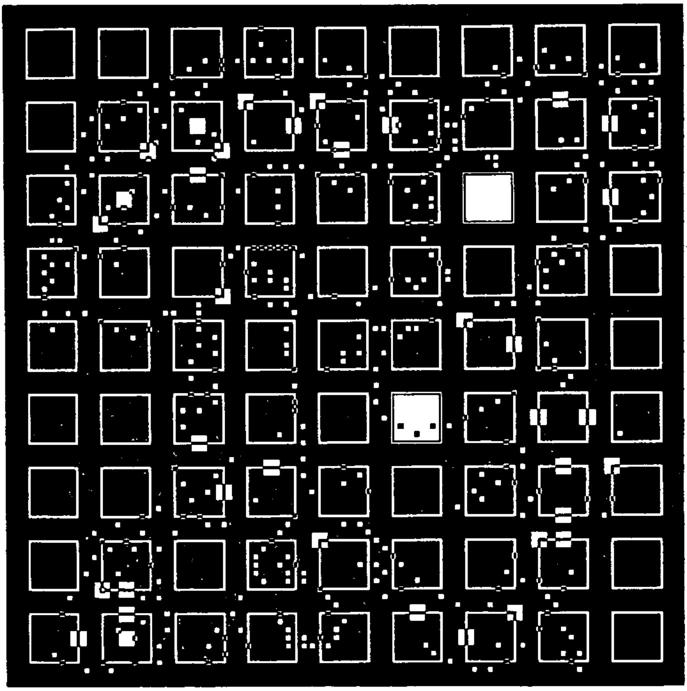


BILD 12: Der 'Plan' zum Bild 10.

Weiß + Weiß = Schwarz. Wir ‘sehen jedenfalls wenn wir dies wollen, auf Grund des Überschneidungsgesetzes des Gestaltsehens trotz aller Überschneidungen jede erscheinende Grundfigur als Ganzes.

Das *Bild* 6 zeigt für den besprochenen Verknüpfungsraster eines seiner Innenbilder. Es zeigt, abgesehen von den Teilen, die über den Bildrahmen hinausragen, die Grundfigur der Schicht 0. 1 Grundfigur der Schicht 1 (oben rechts), 5 Grundfiguren der Schicht 2, die einen senkrechten Stab bilden (links), 29 Grundfiguren der Schicht 3, die ein M und einen waagerechten Stab (unten) bilden, und 130 Grundfiguren der Schicht 4, die die Schrift ‘Licht-Mus(ik)’ sowie vier nur halb sichtbare Schmuckreihen bilden. Der Farbraster ist derselbe wie im Bild 5.

Das *Textbild* 1*a* stellt den geschichteten Rhythmus der Verkleinerungszahl (1/2) in der Geraden dar, also in der Dimension 1. Und zwar in der Teilfigur 1a1 mit Hilfe von Quadraten, in 1a2 mit Hilfe von Sechsecken, in 1a3 mit Hilfe von Rauten. Die beiden dick gezeichneten Strecken in 1a3 unten deuten die Grenzlinien einer Raute der nächst größeren Schicht an. Die dünn gezeichneten deuten die Grenzlinien einer Raute eines anderen Rautenrasters an, bei dem jede Raute ihre beiden Nachbarrauten überlappt.

Das *Textbild* 1*b* stellt entsprechend die 3-adisch-rationalen Zahlen dar, also die rationalen Zahlen, deren Nenner bei gekürzter Darstellung Potenzen von 3 sind. Es stellt sie dar mit Quadraten, mit 16-Ecken und mit einander überlappenden Rauten. Die Textbilder 1a und 1b führen bei sinngemäßer Erweiterung auf die Ebene, also auf die Dimension 2, zu je einem ‘geschichteten Quadratnetz’ und zu je zwei Innensternen in der Ebene.

Das *Textbild* 2 stellt den Grundgedanken des Innensternes dar. 2,1 führt das ‘Überschneidungsgesezt des Gestaltsehens’ vor: Wir ‘sehen’ ohne große Mühe die einander überlappenden großen und kleinen Quadrate als unzerstörte Quadrate, gewissermaßen ‘hintereinander’. 2,2 stellt das geschichtete Quadratnetz der Verkleinerungszahl 2 vor, genauer die Schichten 0, 1, 2 und 3 dieses Netzes. 2,3 stellt denselben Innenstern wie Bild 7 dar. Das Textbild 2 soll sagen: ‘Aus den geschichteten Quadratnetzen (nurd Sechsecknetzen) entstehen durch geeignete gleiche und ähnliche Änderungen aller Zellenränder unter Ausnützung des Überschneidungsgesetzes des Gestaltsehens die Innensterne.’

Das *Textbild* 3 stellt die Konstruktion eines besonders wichtigen Achteck Überlappungs-Innensternes der Verkleinerungszahl (1/2) dar. 3,1 zeigt die Grundfigur der Schicht 2 mit dem Mittelpunkt (0; 0) auf dem zugehörigen geschichteten Quadratnetz. 3,2 zeigt dieselbe Grundfigur auf dem schon im Bild 8 gezeigten ‘Leitraster’. 3,3 zeigt mehrere Grundfiguren der Schichten 2 und 3.

Das *Textbild* 4 stellt die Konstruktion eines besonders wichtigen Achteck-Überlappungs-Innensternes der Verkleinerungszahl (1/3) dar. 4,1 zeigt mehr oder weniger vollständig 5 Grundfiguren der Schicht 1 auf dem zugehörigen geschichteten Quadratnetz. 4,2 zeigt die mittlere dieser Grundfiguren auf dem zugehörigen Leitraster. 4,3 zeigt mehrere Grundfiguren der Schichten 1 und 2.

Die *Bilder* 9 *und* 10 zeigen je ein Innenbild der in den Textbildern 3 und 4 dar-

gestellten Innensterne. Die Bilder 11 und 12 zeigen die zugehörigen 'Pläne' auf den Schichten 3 beziehungsweise 2 der zugehörigen Leitraster. Die Bilder 9 (Jungfrau) und 11 sind Teile einer bereits fertig gezeichneten Tierkreis-Reihe. Die Bilder 10 (Frau) und 12 sind Teile einer ebenfalls gezeichneten Reihe der vier Lebensalter in weiblich und in männlich.

Die Bilder dieser beiden Reihen wurden nebst anderen gegenständlichen Bildern von Herrn Oberstudienrat i.R. Walter Schmeer in Saarbrücken entworfen. 'Die dynamische Lichtmusik wird freilich in der Regel weder Schrift noch Gegenstände darstellen.

Wie entsteht nun ein Werk der geplanten dynamischen Lichtmusik? Der 'Lichtkomponist' legt erstens einen geeigneten Innenstern zugrunde, etwa den des Textbildes 3 oder den des Textbildes 4. Er legt zweitens fest, welche Schichten dieses Innensternes er benutzen will. Er legt drittens fest, welche Farben er benutzen will, viertens, welche Farben als 'Überlagerungsfarben' oder 'Mischfarben' auftreten sollen, wenn an irgendeiner Stelle des Spielfeldes zwei oder mehr Farben einander überlagern. Er legt fünftens fest, welche (dem Innenstern angepaßten) stetigen Bewegungen der Grundfiguren nach oben-unten, nach rechts-links und nach vorne-hinten (Größerwerden und Kleinerwerden) zugelassen sind.

Auf einer späteren Entwicklungsstufe wird er auch bestimmte Mischungen von Grundfiguren verschiedener Innensterne zulassen, sodann bestimmte Formveränderungen der zugelassenen Grundfiguren während des Spieles. In diesen Erweiterungen liegen natürlich Gefahren, ebenso wie in der Benutzung zu feiner Schichten des zugrundegelegten Innensternes, mit denen sich praktisch jede beliebige gegenständliche oder gegenstandsfreie Form als Innenbild nachbilden läßt.

Nach all diesen Vorbereitungen erledigt der 'Lichtkomponist' den Hauptteil seiner Arbeit. Er legt dann fest, was im Laufe der Spielzeit mit den einzelnen Grundfiguren geschehen soll, das heißt, wann sie aufleuchten und mit welcher Farbe und wann und wie sie sich bewegen sollen. Er komponiert schließlich die tonmusikalische Begleitung entweder selbst hinzu, oder er überläßt diese Arbeit einem Tonkomponisten.

Die technische Verwirklichung eines solchen Innenspieles kann auf zwei Weisen geschehen. Beim ersten Verfahren werden wie in einem Trickfilm für jede Sekunde des Spieles etwa 20 Bilder gezeichnet und wird aus deren Fotografien ein Film zusammengestellt. Das erfordert natürlich ein Heer von Zeichnern und ist ein sehr kostspieliges Verfahren. Glücklicherweise ist die Lichtmusik auf dieses Verfahren nicht angewiesen.

Beim zweiten, sehr viel günstigeren Verfahren werden 'Lichtorgeln' gebaut. Das sind elektronische Geräte, bei denen auf einer Tastatur nach Einstellung des gewünschten Form- und Farbenrasters die gewünschten Grundfiguren und die gewünschten Farben getippt werden. Auf einer Scheibe nach der Art der Farb-Fernseh-Scheibe sollen dann die fertigen Innenbilder erscheinen. Weiter muß die Möglichkeit bestehen, diese als Filmbilder zu stabilisieren und die so

erhaltenen Filme später in jedem gewünschten Tempo ablaufen zu lassen. Solche Filme sollen in Lichtspieltheatern und im Farbfernsehen gebracht werden, und sie sollen, ebenso wie Schallplatten von jedermann zu erwerben und in Heimkinos vorzuführen sein.
Die 'Lichtorgeln' selbst werden sicherlich etwa wie Autos und Flugzeuge in aufeinander folgenden 'Generationen' und in den verschiedensten Preis- und Güteklassen hergestellt werden. Da sie im Gegensatz zu Klavieren und Tonorgeln auch bei ganz stümperhafter Bedienung bereits ästhetisch ansprechende und darüber hinaus interessante Bilder und Spiele ergeben, dürfte das Interesse in breiten Schichten nicht gering sein. Eine Koppelung mit Computern, die dem 'Lichtkomponisten' mehr oder weniger große Teile der Kompositionsarbeit abnehmen, ist möglich und erwünscht. Welche Elektronische Firma macht den Anfang mit der Konstruktion zunächst einfacher 'Lichtorgeln'? Die Investitionen dürften sich lohnen.
Ein Werk der Lichtmusik wird, wie schon gesagt, in der Regel von Tonmusik begleitet sein. Dabei wird die Beziehung zwischen Bild und Klang wesentlich enger und 'natürlicher' sein als bei gegenständlichen Filmen. Der künstlerische Wert eines Werkes der Lichtmusik wird von der Leistung des Komponisten abhängen. Die Rastergrundlagen der Lichtmusik gestatten wie die Tonleitern der Tonmusik hohe Kunst, Mittelwerke und Kitsch, alle möglichen Stile, komplizierteste bis einfachste Werke. Dabei wird die Grenze zwischen 'gewachsenen Boden' der Mathematik und 'Menschenwerk' der Technik und der Kunst vielfach nur schwer zu ziehen sein.
Man wird mit einfachsten Werken beginnen müssen. Erst im Laufe der Jahrzehnte und Jahrhunderte werden sich Traditionen und Stile entwickeln und werden sich Wertmaßstäbe und Autoritäten, herausbilden, wie wir sie in der Tonmusik kennen. Hoffen wir, daß wir eine erste Blüte dieser neuen Kunst noch erleben, und tun wir das Unsrige dazu!
Ein Innenstern liegt fest, wenn eine seiner Grundfiguren gegeben ist, etwa die der Schicht 0 mit dem Mittelpunkt (0; 0). Wir können die Randlinien dieser 'ausgezeichneten Grundfigur' aus Teilstrecken der Kraftlinien der Schicht 1 'in neuer Lage' bilden (etwa so wie in den drei Figuren des Textbildes 1a). Dann gehören die Randlinien der Grundfiguren der Schicht n ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) den Kraftlinien der Schicht $(n+1)$ 'in neuer Lage' an. Wir können allgemeiner die Randlinien der 'ausgezeichneten Grundfigur' aus Teilstrecken der Kraftlinien der Schicht k (k ganz, $k > 0$) 'in neuer Lage' bilden. Dann gehören die Randlinien der Grundfiguren der Schicht n ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) den Kraftlinien der Schicht $(n+k)$ 'in neuer Lage' an.
In jedem Falle ist gesichert, daß niemals Randlinien einer Schicht mit Randlinien einer anderen Schicht zusammenfallen. Wir können auch die 'ausgezeichnete Grundfigur' etwa aus waagerechten Linien der Schicht 1, senkrechten der Schicht 2 und schrägen der Schicht 3 aufbauen. Wir können auch statt der 'Kraftlinien' 'Feldlinien' benutzen. Man vergleiche hierzu etwa in [8] und [9]!

LITERATUR

[1] 'Saarbrücker Hefte' im Minerva Verlag Saarbrücken, Nr. 10 (1959), 'Der Aufbau des Seins nach Zeit und Raum – Teil 2', S. 109 Bild 67 und S. 148 Bild 80. – Das sind die ersten gezeichneten 'Siebenkreis-Bilder'. Durch einen glücklichen Zufall wurden sie sofort gedruckt. Über den 'iterierten Siebenkreis' oder 'gefüllten Siebenkreis' und seine 'Bilder' als unvollkommene Vorstufen habe ich in der Folgezeit die 'Innensterne' und deren 'Bilder' entdeckt.

[2] 'Saarbrücker Hefte' Nr. 16 (1962), 'Geometrische Sterne' (mit 12 Bildern), S. 89–92. – In diesem Aufsatz wurden die ersten 'Innenbilder' gedruckt.

[3] 'Saarbrücker Hefte' Nr. 20 (1964), 'Geometrische Bilder' (mit 65 Bildern), S. 51–111.

[4] 'Saarbrücker Hefte' Nr. 24 (1966), 'Geometrische Spiele' (mit 65 Bildern), S. 25–48.

[5] 'Saarbrücker Hefte' Nr. 26 (1967), 'Der Innenstern, die Grundlage einer Lichtmusik' (mit 77 Bildern), S. 33–76. Die Tafel auf S. 47 bedarf einer Berichtigung.

[6] 'Archimedes' im Verlag Josef Habbel in Regensburg, 1968 Sonderheft, 'Mathematik und Kunst' (mit 1 Bild), S. 16.

[7] 'Archimedes', 1969 Heft 3, 'Siebenkreis, Innenstern und Lichtmusik, die geometrischen Grundlagen einer neuen Bild- und Filmkunst' (mit 4 Bildern), S. 77–82.

[8] 'Praxis der Mathematik' im Aulis Verlag Deubner und Co. KG. Köln, 1969 Heft 3, 'Das geschichtete Flächenornament, die gleichförmig-ganzheitliche Formleiter einer Lichtmusik – Teil 1' (mit 10 Bildern), S. 61–70. Auf S. 61 hinter '2.' Sind die beiden ersten Wörter zu vertauschen.

[9] 'Praxis der Mathematik', 1969 Heft 11, 'Das geschichtete Flächenornament, ... – Teil 2' (mit 8 Bildern), S. 299–308.

[10] 'Zeitschrift des Schulvereins des Städtischen Mädchenrealgymnasiums Saarbrücken', Nr. 3 (1969 Heft 2), 'Das sichtbare Koordinatensystem, seine Bilder und Spiele, die Grundlagen einer Lichtmusik' (mit 4 Bildern), S. 28–35.

[11] Hermann Weyl, 'Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft', München 1928 (2., unveränderte Auflage München 1948, 3., erweiterte Auflage Darmstadt 1966, amerikanische Ausgabe: 'Philosophy of Mathematics and Natural Science', Princeton 1949). – Das Buch bietet wesentliche philosophische Gedanken über Qualität und Struktur, Diskontinuum und Kontinuum, Zahl, Zeit und Raum.

[12] Hans Freudenthal, 'Neuere Fassungen des Riemann-Helmholtz-Lieschen Raumproblems', in 'Mathematische Zeitschrift' Band 63 (1956), S. 374–405. – Der Aufsatz beleuchtet die Bedeutung der 'Gleichförmigkeit' für die klassischen metrischen Geometrien.

[13] Paul Lorenzen, 'Das Begründungsproblem der Geometrie als Wissenschaft der räumlichen Ordnung', in 'Philosophia Naturalis' Band VI Heft 4 (1961), S. 415–431, abgedruckt in: Paul Lorenzen, 'Methodisches Denken', Frankfurt am Main 1969. – Der Aufsatz behandelt in Weiterführung von Gedanken Hugo Dinglers die Bedeutung der 'Gleichförmigkeit' für den konstruktivistischen Aufbau der Geometrie.

[14] Rudolf Arnheim, 'Kunst und Sehen', Berlin 1965 (Übersetzung von 'Art and visual perfection, a psychology of the creative eye', Berkeley und Los Angeles 1954 und 1960). – Man vergleiche besonders das Kapitel 'Der Raum', S. 187–258, weiter S. 102–103!

[15] Paul Klee, 'Das bildnerische Denken', herausgegeben von Jürgen Spiller, Basel 1956. – Das Buch stößt an einigen Stellen bis in die Nähe einer Entdeckung der Innensterne und -bilder vor. Man vergleiche besonders auf den Seiten 233 (Rasterbenutzung), 275 (geschichteter Rhythmus in einer Dimension mit Kreisen), 96 (geschichtetes Flächenornament, man vergleiche mit unserem Bild 4!), 490 ('Fuge in Rot', gibt den Eindruck eines komplizierten Bildes der Lichtmusik!). – Der Grund dafür, daß Klee die Innensterne und -bilder doch nicht entdeckt hat, liegt in seiner Überzeugung, daß in der Flächenkunst eine Auswahlfreiheit nicht ausreiche, sondern eine Verformungsfreiheit hinzukommen müsse. Man vergleiche

hierzu S. 151: '... daß man mit der Theorie nicht konsequent durchkommt, sondern immer etwas unterbrechen muß.' und S. 152: '... Nimmt man aber das Gesetzmäßige zu streng, so kommt man auf dürres Gebiet.' Dieser Sachverhalt ist ein eindrucksvolles Beispiel dafür, wie ein 'consensus omnium', eine übereinstimmende Meinung aller 'Gebildeten', selbst freieste Geister blenden kann.

[16] 'Saarbrücker Hefte' Nr. 31 (1970) 'Lichtmusik und Lichtorgel, die Grundlagen einer neuen Kunst' (mit 5 Bildern), 8 Seiten.

Commissie modernisering leerplan wiskunde

Cursussen Moderne Wiskunde voor 2e en 3e graads leraren georganiseerd door de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde (C.M.L.W.).

De C.M.L.W. organiseert in het komende cursusjaar 1970/1971 een tweetal cursussen voor erären van het mavo, het l.b.o. en het m.b.o. te weten:

1) een cursus Statistiek voor hen die reeds een volledige applicatiecursus van de C.M.L.W. volgden, of anderszins voldoende zijn ingevoerd in de moderne wiskunde;

2) een cursus Basisbegrippen van de wiskunde voor hen die nog geen applicatiecursus volgden. Deze cursus is ook geschikt voor bezitters van de akte KI, die beter ingevoerd willen worden in de moderne wiskunde.

In principe zijn deze cursussen alleen toegankelijk voor leraren van het mavo, het l.b.o. en het m.b.o. Wij nodigen *alle betrokken leraren* uit een inschrijfformulier bij het secretariaat van de C.M.L.W. aan te vragen. (Natuurlijk alleen dan als u nog niet heeft ingeschreven.) Speciaal voor leraren bij andere takken van onderwijs, die met de moderne wiskunde nader wensen kennis te maken (naast bezitters van bijv. de akte KI denken wij hier ook aan leraren aan Ped. Academies, die betrokken zijn of worden bij het moderne wiskunde-onderwijs op de basisschool) kan de cursus Basisbegrippen eveneens van belang zijn.
Gaarne nodigen wij ook deze collega's uit op de cursus Basisbegrippen in te schrijven door bij het

Secretariaat van de C.M.L.W.
Universiteitscentrum 'De Uithof'
Budapestlaan 6
Utrecht

een inschrijfformulier voor de betreffende cursus aan te vragen en dit dan na ontvangst per omgaande *volledig* ingevuld aan het secretariaat van de Commissie te retourneren.

Utrecht, 2 juni 1970 — drs. H. L. Claasen

Vectoren

P. G. J. VREDENDUIN
Oosterbeek

Als men les geeft in 'meetkunde met vectoren' zal na enige tijd de klas komen met de volgende vraag: Wat is het verband tussen de vectoren, waar u het over heeft, en de vectoren, die we in de natuurkundeles tegenkomen? Zonder twijfel een belangrijke vraag, waarop het antwoord niet in enkele zinnen te geven is. In de wiskunde is een vector een element van een vectorruimte. Wat een vectorruimte is, wordt vastgelegd door een stel axioma's.

Axioma 1. Een vectorruimte is een verzameling V voorzien van een afbeelding van $V \times V$ naar V

$$(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \to \boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}$$

met de volgende eigenschappen:

1.1. $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}+\boldsymbol{v}$

1.2. $\boldsymbol{v}+(\boldsymbol{w}+\boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})+\boldsymbol{u}$

1.3. er is een $\boldsymbol{x}$ met de eigenschap $\forall \boldsymbol{v}\ \boldsymbol{v}+\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v}$

(Bewezen kan nu worden, dat er slechts één element met deze eigenschap is. We noteren dit element: $\mathbf{0}$.)

1.4. bij elke $\boldsymbol{v}$ bestaat een $\boldsymbol{x}$, waarvoor $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$

(Bewezen kan worden, dat er slechts één zo'n element is. We noteren dit element: $-\boldsymbol{v}$.)

Axioma 2. Er is een afbeelding van $\mathbf{R} \times V$ naar V

$$(r, \boldsymbol{v}) \to r \cdot \boldsymbol{v}$$

met de volgende eigenschappen:

2.1. $r(s\boldsymbol{v}) = (rs)\boldsymbol{v}$

2.2. $(r+s)\boldsymbol{v} = r\boldsymbol{v}+s\boldsymbol{v}$

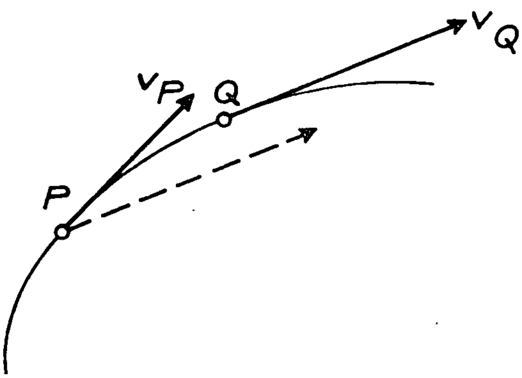
2.3. $r(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) = r\boldsymbol{v}+r\boldsymbol{w}$

2.4. $1 \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$

Nu de vectoren in de natuurkunde. Laat ik niet proberen een definitie te geven van een vector in de natuurkunde. Ik vrees, dat dat weinig zou baten en dat

het spraakgebruik van leraar tot leraar zal verschillen. Ik wil liever vaststellen, dat een vector in elk geval een grootheid is, die een grootte en een richting heeft, en mij niet erin verdiepen of elke zodanige grootheid door natuurkundeleraren een vector genoemd wordt. Ik wil nu enige grootheden de revue laten passeren, die een grootte en een richting hebben en veelal door een pijltje worden voorgesteld.

Allereerst de snelheid. Een stoffelijk punt beschrijft een baan. Op een gegeven moment is het in punt P. De snelheid v_P wordt dan voorgesteld door een pijltje, dat aangrijpt in P en gericht is langs de raaklijn in P aan de baan (figuur 1).



Figuur 1

Even later is het punt in Q. De snelheid v_Q wordt nu voorgesteld door een pijltje, dat in Q aangrijpt en weer gericht is langs de raaklijn aan de baan. Nu kan het voorkomen, dat we de versnelling willen bepalen in P. We bepalen dan eerst de snelheidsvermeerdering, die het punt heeft ondergaan tussen de momenten, dat het in P resp. in Q was. We trekken daartoe v_P af van v_Q. We verschuiven het pijltje, dat v_Q voorstelt, naar P. Ik herinner mij uit mijn eigen hbs-tijd, dat ik dit zeer wonderlijk vond. De snelheid had immers een aangrijpingspunt en het was niet in te zien, dat je zo'n snelheid dan maar plots evenwijdig mocht verschuiven.

Of dat mag, hangt er natuurlijk mee samen, wanneer je twee snelheden hetzelfde noemt. Als soldaten in een colonne marcheren, dan zeg je, dat ze allen dezelfde snelheid hebben. Als daarentegen twee personen langs niet evenwijdige wegen lopen allebei met een snelheid van 5 km/h, dan zeg je dat hun snelheden even groot zijn. Snelheden zijn dus hetzelfde, als ze zowel even groot als gelijk van richting zijn.

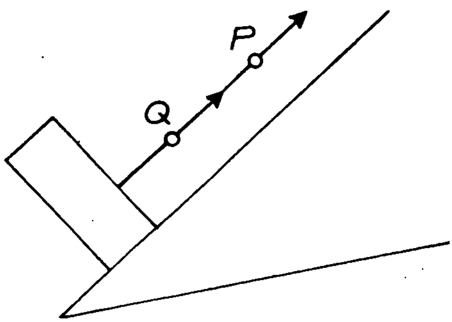
Anders gezegd: in eerste instantie kunnen we de snelheid van een stoffelijk punt bepalen door te geven het aangrijpingspunt, de grootte en de richting. De relatie 'gelijke grootte en gelijke richting hebben' is een ekwivalentierelatie tussen deze snelheden. Deze verdeelt de snelheden in ekwivalentieklassen. Nu veranderen we onze terminologie en noemen deze ekwivalentieklassen snelheden. Daarmee heeft de snelheid van een stoffelijk punt als het ware zijn

aangrijpingspunt verloren. Snelheid wordt zo een vrije vector. En daarmee blijkt, dat met snelheden gerekend kan worden, conform de axioma's van de vectorruimte.

Hier is overeenstemming bereikt tussen het mathematische en het fysische vectorbegrip. De fysicus kan dus, als hij het over snelheden heeft, vertrouwen op de theorie, die de wiskundige ontwikkeld heeft uitgaande van zijn axioma's 1 en 2. Het betoog van de fysicus zou aan duidelijkheid winnen, als hij niet de term 'snelheid' in twee verschillende betekenissen zou gebruiken, nl. als snelheid met aangrijpingspunt en als ekwivalentieklasse van dergelijke snelheden.

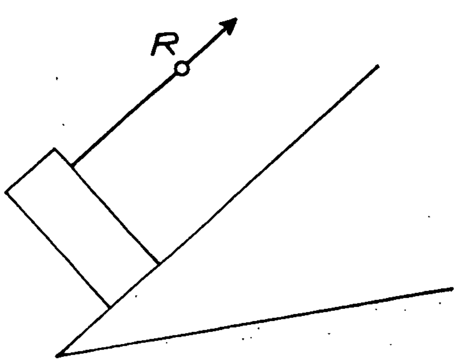
Na het voorgaande biedt de versnelling geen nieuwe problemen. Deze kan op soortgelijke wijze behandeld worden en blijkt dan ook een vrije vector te zijn.

Nu de kracht. Ook een kracht heeft een grootte, een richting en een aangrijpingspunt. We willen een blok over een hellend vlak naar boven trekken. We binden er een touw aan en trekken aan het touw in P (figuur 2). De kracht,



Figuur 2

die we uitoefenen, geven we aan door een pijltje, dat in P begint en gericht is langs het touw. We kunnen ook in Q aan het touw trekken. Trekken we dan even hard als in P, dan is de uitwerking dezelfde. Nu maken we het touw op een andere plaats aan het lichaam vast (figuur 3). We maken het bovenaan het lichaam vast, maar trekken weer in dezelfde richting als in figuur 2. De



Figuur 3

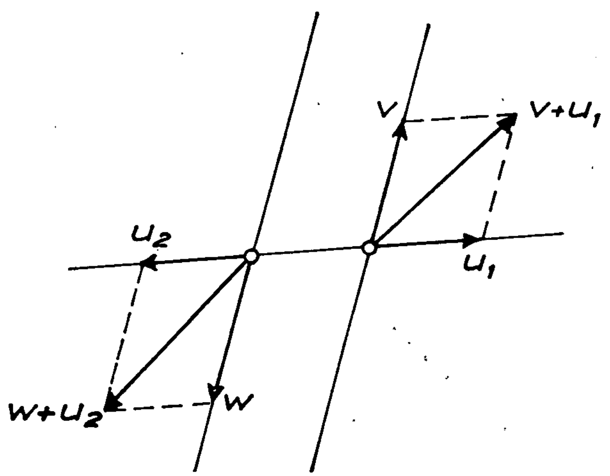
kracht wordt voorgesteld door een pijltje, dat even lang is als het pijltje in figuur 2 en dezelfde richting heeft. Toch is de invloed van de kracht in figuur 3 een andere dan van die in figuur 2. Het is best mogelijk, dat ten gevolge van de kracht in figuur 2 het voorwerp langs het vlak omhoog wordt getrokken en het ten gevolge van de kracht in figuur 3 omkantelt. We hebben dus alle reden om de krachten in figuur 2 in P en in Q hetzelfde te noemen, maar zullen dit niet doen met de krachten in P en in R,

In eerste instantie bepalen we een kracht dus weer door aangrijpingspunt, grootte en richting. Nu beschouwen we de relatie 'gelijke grootte, gelijke richting en gelijke drager hebben'. Deze relatie is een ekwivalentierelatie. Ze verdeelt de krachten in ekwivalentieklassen. Nu veranderen we onze terminologie en noemen deze ekwivalentieklassen krachten. De kracht heeft zo als het ware zijn aangrijpingspunt verloren, maar heeft zijn drager behouden. De kracht is dus geen vrije vector, maar iets anders. Meestal spreekt men van een glijdende vector.

Het wordt nu tijd ons af te vragen of deze glijdende vectoren gehoorzamen aan de axioma's van een vectorruimte. Reeds in het begin van axioma 1 komen we in moeilijkheden. Het optellen van de glijdende vectoren gaat prima, zolang ze maar snijdende dragers of samenvallende dragers hebben.

Natuurlijk willen we nu trachten ook glijdende vectoren met dragers, die geen punt gemeen hebben, op te tellen. Laten we ons daarbij eerst tot het platte vlak beperken.

Een fysicus wil twee krachten met evenwijdige niet samenvallende dragers optellen. Hij ontwerpt daartoe figuur 4. De op te tellen krachten zijn $\boldsymbol{v}$ en $\boldsymbol{w}$. Hij



Figuur 4

voegt nog twee krachten $\boldsymbol{u}_1$ en $\boldsymbol{u}_2$ toe, die dezelfde drager hebben, even groot en tegengesteld gericht zijn en dus als som $\mathbf{0}$ hebben. En nu redeneert hij als volgt:

$$\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w} = (\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})+\mathbf{0} = (\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})+(\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{u}_2) = (\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}_1)+(\boldsymbol{w}+\boldsymbol{u}_2).$$

Als het meezit, hebben $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}_1$ en $\boldsymbol{w}+\boldsymbol{u}_2$ snijdende dragers. We kunnen ze dan optellen en hebben dus toch $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}$ gevonden. Laten we het de fysicus niet kwalijk nemen, dat hij de axioma's klakkeloos toepast op een geval, waarin de optelling nog niet gedefinieerd is.
Nu nog de laatste adder. De fysicus hoopt in eerste instantie, dat de dragers van $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}_1$ en $\boldsymbol{w}+\boldsymbol{u}_2$ elkaar zullen snijden. Althans, dat het mogelijk zal zijn $\boldsymbol{u}_1$ en $\boldsymbol{u}_2$ zo te kiezen, dat dit het geval is. Deze hoop wordt al ras de bodem ingeslagen. Dit blijkt niet het geval te zijn, als $\boldsymbol{v}$ en $\boldsymbol{w}$ even groot en tegengesteld gericht zijn.
Nu hult de fysicus zich in een zuiver fysisch gewaad. Hij gaat na, of er een kracht is, die dezelfde uitwerking heeft als een tweetal even grote, tegengesteld gerichte krachten met verschillende dragers samen hebben. Een dergelijk tweetal krachten heeft als uitwerking een roterende beweging. Een kracht, die in het zwaartepunt van een lichaam aangrijpt, heeft als uitwerking een translatie. Een kracht, die in een ander punt aangrijpt, heeft als uitwerking een beweging, die samengesteld is uit een rotatie en een (niet-identieke) translatie. Er is dus geen kracht, waarvan de uitwerking een rotatie is. En dus zal de fysicus niet de neiging vertonen op de een of andere wijze de som van twee even grote, tegengesteld gerichte krachten met verschillende dragers te definieren als een kracht.
Dit alles zullen we onze leerlingen duidelijk moeten maken, als ze vragen naar het verband tussen de vectoren uit de natuurkunde- en die uit de wiskundeles.
Het loont de moeite om nog iets verder op het probleem in te gaan, hoewel dat in de klas niet mogelijk zal zijn. We hebben een verzameling, de verzameling G van de glijdende vectoren, en een operatie $+$, die echter niet voor elk paar vectoren gedefinieerd is. Zijn de vectoren gelijk en tegengesteld (en ongelijk $\mathbf{0}$) en hebben ze verschillende dragers, dan is de optelling niet mogelijk. Wat doet de wiskundige in een dergelijke situatie? Hij breidt zijn verzameling uit tot een nieuwe verzameling, waarin de operatie $+$ wel altijd gedefinieerd is. Laten we nu bij de fysicus te rade gaan, hoe we dit zullen doen. De fysicus telt twee gelijke en tegengestelde krachten op en zegt, dat daardoor een koppel ontstaat. Welnu, daarmee zijn onze nieuwe elementen, fysisch gezien, al gevonden: het zijn de koppels. De fysicus zal in de verzameling, die de vereniging is van de glijdende vectoren en de koppels een optelling definiëren. Hoe, dat is ieder bekend. Nu komt de mathematicus weer op het tapijt en zal hij gaan onderzoeken, wat de structuur is van de nieuwe verzameling (glijdende vectoren en koppels) voorzien van de operatie $+$. En wat blijkt? Dat de axioma's 1–2 alle van kracht zijn. De zo verkregen verzameling heeft dus de structuur van een vectorruimte, en wel van een *drie*dimensionale vectorruimte. Dat we ons tot het platte vlak beperkt hebben, was voor ons gemak. De situatie in drie dimensies is niet wezenlijk verschillend van de situatie in twee.
Na deze uitweiding keren we weer terug tot de dingen, die in de klas wel behandeld kunnen worden. Zowel bij het definiëren van snelheid als van kracht zijn we uitgegaan van gerichte lijnstukken. De snelheid was in eerste instantie

een gericht lijnstuk met een bepaald aangrijpingspunt en de kracht ook. Daarna zijn snelheid en kracht gedefinieerd als ekwivalentieklassen van dergelijke gerichte lijnstukken. Het verschil ontstond, doordat de ekwivalentierelaties niet dezelfde waren. Bij de snelheid was als ekwivalentierelatie gekozen: is even groot en gelijkgericht. En bij de kracht: is even groot en gelijkgericht en heeft dezelfde drager. Zijn er nog andere fysisch relevante mogelijkheden? We zouden ook helemaal geen ekwivalentierelatie kunnen invoeren. We beschouwen de verplaatsing $\vec{AB}$ van A naar B. Deze heeft een grootte en een richting en bovendien een beginpunt (en een door het voorgaande bepaald eindpunt). Twee verplaatsingen zijn alleen dan dezelfde als ze dezelfde grootte, dezelfde richting en hetzelfde beginpunt hebben. Met deze verplaatsingen is het, gezien vanuit de structuur van een vectorruimte, droevig gesteld. We kunnen $\vec{AB}$ en $\vec{CD}$ optellen, als $B = C$, en anders niet. Voor de optelling geldt

$$\vec{AB}+\vec{BC} = \vec{AC}.$$

We voeren de notatie in: $\vec{AA} = \vec{0}_A$. Nu is voor elke A en B

$$\vec{0}_A+\vec{AB} = \vec{AB} \quad \text{en} \quad \vec{AB}+\vec{0}_B = \vec{AB}.$$

Maar

$$A \neq B \Rightarrow \vec{0}_A \neq \vec{0}_B.$$

Ten slotte is

$$\vec{AB}+\vec{BA} = \vec{0}_A.$$

Van een nulelement en van een inverse, zoals gedefinieerd bij het opstellen van de axioma's 1–2, is dus geen sprake. De verplaatsingen hebben met de vectoren van een vectorruimte al heel weinig uit te staan.

We zijn er nog niet. De fysicus kent nog meer vectoren. B.v. de vectoren, die het uitwendig produkt zijn van twee vectoren. Dat zijn rare dingen. Neem b.v. de eenheidsvector langs de x-as en die langs de y-as, en noem deze resp. $\boldsymbol{e}_1$ en $\boldsymbol{e}_2$. Dan is het uitwendig produkt $\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2$ gelijk aan de eenheidsvector langs de z-as, die we $\boldsymbol{e}_3$ zullen noemen. Meer algemeen zal het uitwendig produkt van de vector $\boldsymbol{a}$ met kentallen (a_1, a_2, a_3) en de vector $\boldsymbol{b}$ met kentallen (b_1, b_2, b_3) zijn de vector met kentallen

$$x = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \quad y = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \quad z = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Nu is er iets merkwaardigs. Verwissel de x-as en de y-as, maar laat de z-as ongewijzigd. De kentallen van de vector $\boldsymbol{a}$ worden dan (a_2, a_1, a_3) en die van de vector $\boldsymbol{b}$ (b_2, b_1, b_3). De kentallen van het uitwendig produkt worden

$$x' = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \quad y' = \begin{vmatrix} a_3 & a_2 \\ b_3 & b_2 \end{vmatrix}, \quad z' = \begin{vmatrix} a_2 & a_1 \\ b_2 & b_1 \end{vmatrix}.$$

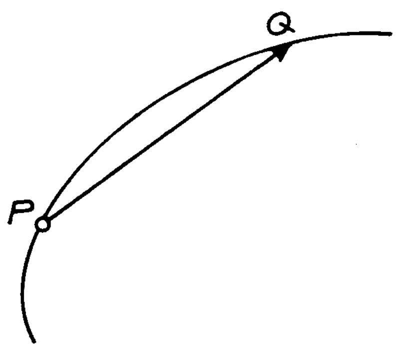
Dus is

$$x' = -y, \quad y' = -x, \quad z' = -z.$$

Gezien het feit, dat de nieuwe x-as en y-as samenvallen met resp. de oude y-as en x-as, is het nieuwe uitwendige produkt van $\boldsymbol{a}$ en $\boldsymbol{b}$ juist het tegengestelde van het oude uitwendige produkt. Anders gezegd: waaraan het uitwendig produkt van twee vectoren $\boldsymbol{a}$ en $\boldsymbol{b}$ gelijk is, hangt niet alleen af van de vectoren $\boldsymbol{a}$ en $\boldsymbol{b}$, maar ook van de oriëntatie van de vectorruimte, waartoe $\boldsymbol{a}$ en $\boldsymbol{b}$ behoren. Veranderen we de oriëntatie, dan is het nieuwe uitwendige produkt gelijk aan het tegengestelde van het oude.
Nog een grapje met het uitwendig produkt. Neem weer de vectoren $\boldsymbol{e}_1$ en $\boldsymbol{e}_2$. Het uitwendige produkt is $\boldsymbol{e}_3$. Want het uitwendige produkt van de vectoren met kentallen (1, 0, 0) en (0, 1, 0) heeft als kentallen (0, 0, 1). Neem nu als nieuwe eenheidsvectoren $\boldsymbol{e}_1' = \frac{1}{2}\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2' = \frac{1}{2}\boldsymbol{e}_2$ en $\boldsymbol{e}_3' = \frac{1}{2}\boldsymbol{e}_3$. De kentallen van de oude vectoren $\boldsymbol{e}_1$ en $\boldsymbol{e}_2$ worden dan (2, 0, 0) en (0, 2, 0). De kentallen van het uitwendige produkt worden dus (0, 0, 4). Het uitwendige produkt van $\boldsymbol{e}_1$ en $\boldsymbol{e}_2$ wordt dus $4 \cdot \boldsymbol{e}_3'$, en dat is een vector, die 2 maal zo lang is als het oude uitwendige produkt van $\boldsymbol{e}_1$ en $\boldsymbol{e}_2$. Door halvering van de eenheidsvectoren wordt het uitwendige produkt dus met 2 vermenigvuldigd.
Conclusie. Tracht het uitwendig produkt op te vatten als een vector. De operatie 'vormen van het uitwendig produkt' is dan een afbeelding van $V \times V$ naar V, die afhangt van de oriëntatie van de basis van de vectorruimte en bovendien van de grootte van de basisvectoren. Anders geformuleerd: het is een afbeelding, die alleen gedefinieerd is in een vectorruimte met inprodukt, maar die dan afhankelijk is van de oriëntatie van deze ruimte.
Er zijn dus redenen, die het moeilijk maken uitwendige produkten als vectoren te beschouwen. Nog duidelijker wordt dit, als we de optelling beschouwen. Het optellen van $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}$ en $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u}$ levert geen al te grote moeilijkheden. Als we de oriëntatie van de ruimte veranderen keren beide produkten en daardoor ook hun som van teken om. Maar probeer nu eens b.v. $\boldsymbol{v}$ en $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}$ op te tellen. Veranderen we de oriëntatie van de ruimte, dan blijft $\boldsymbol{v}$ ongewijzigd en gaat $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}$ in zijn tegengestelde over. Hetgeen een wonderlijke invloed op de som zou hebben.
Er is nog meer geks. Als het nemen van het uitwendig produkt een operatie was, die in een willekeurige vectorruimte aan een geordend paar vectoren een vector toevoegde, dan was dat het geval in een vectorruimte met een willekeurig aantal dimensies. In een tweedimensionale vectorruimte heb ik echter geen uitwendig produkt zien definiëren. Waarom niet? Het aantal kentallen van het uitwendig produkt in een driedimensionale ruimte is $\binom{3}{2} = 3$. Dat treft. Maar in een tweedimensionale ruimte zou het zijn $\binom{2}{2} = 1$ en in een vierdimensionale $\binom{4}{2} = 6$. En daarmee is het vonnis geveld. Het uitwendige produkt van twee vectoren is geen vector.[1] De behandeling van het uitwendig

[1] Wil men de axioma's erbij betrekken, dan zou men kunnen zeggen, dat de vereniging van de verzameling van de vectoren van een vectorruimte en van hun uitwendige produkten daarom niet aan de axioma's voldoet, omdat de som van een vector en een uitwendig produkt niet gedefinieerd is.

produkt hoort niet thuis in de lineaire algebra, maar in de multilineaire. En daarom hebben de mathematici ervan afgezien de behandeling van het uitwendig produkt in wiskunde II op te nemen. In wiskunde II wordt de lineaire algebra gebruikt als hulpmiddel om nader de ruimte te onderzoeken. En het nemen van het uitwendige produkt valt daarbuiten.
Natuurlijk is het uitwendige produkt voor de fysicus van belang. Het speelt een onmisbare rol b.v. bij de behandeling van de wet van Biot en Savart. Zou het voor de fysicus een groot bezwaar zijn hier zelf het heft in handen te nemen? Voor alle partijen kan dit een goede begripsvorming alleen maar bevorderen.
Blijft over de vraag, of de fysici werkelijk zo'n diversiteit van vectoren hebben als hierboven geschetst is. Ik heb daar Krans en Vrij, Leerboek der natuurkunde 1, op nageslagen. Op blz. 166 zeggen de auteurs: 'Vectoren zijn grootheden, die volledig bepaald zijn door grootte en richting.' En daarmee schijnen ze van plan te zijn het fysische vectorbegrip met het mathematische te identificeren. Op blz. 176 vind ik echter: 'Van de verplaatsingsvectoren liggen dus alleen de begin- en de eindpunten op de baan van het deeltje.' Hier blijken vectoren te worden beschouwd, die tot de derde hierboven behandelde kategorie (geen ekwivalentierelatie) behoren (vgl. figuur 5). En op blz. 189 vinden we vectoren die krachten voorstellen.



Figuur 5

Conclusie. Het is wel zeer wenselijk, dat fysici en mathematici zich met elkaar verstaan om van elkaar te begrijpen, wat ze onder een vector verstaan. Daarna zal het hun mogelijk worden verwarring bij hun leerlingen te voorkomen. Natuurlijk is het geenszins noodzakelijk, dat de fysici de terminologie van de mathematici overnemen. Maar wel, dat de leerlingen het verband tussen de vectortaal van de wiskundige en van de natuurkundige duidelijk gemaakt wordt.

Over eigenschappen van relaties

In WISKUNDE POST, de Belgische collega van ons Pythagoras, heeft Dr. R. Holvoet enkele artikelen geschreven over relaties en groepen. We kregen zijn toestemming deze artikelen over te nemen. Omdat ze hier en daar vooral waren gericht tot de Belgische jeugd en op de kennis die deze jongelui op hun scholen hadden verworven hebben we ze enigszins omgewerkt.

De hedendaagse wiskunde is relationeel: we bestuderen verzamelingen van dingen die door relaties verbonden zijn. Het lijkt ons dan ook nuttig nog eens een bijdrage over relaties te leveren. Tegelijk dringen we aan op het juiste gebruik van kwantoren.

I Kwantoren

Verschillende keren zullen we het verband tussen de *existentiële kwantor* en de *universele kwantor* gebruiken.
Zij P een beweringsfunctie. De ontkenning van de bewering

$\forall x : \mathrm{P}$

(lees: *voor alle x*: P)
is gelijkwaardig met

$\exists x : \text{niet } \mathrm{P}$

(lees: *er bestaat x* zó, dat niet P)
In formulevorm

$\textit{niet } (\forall x : \mathrm{P}) \Leftrightarrow \exists x : \textit{niet } \mathrm{P}$

Voorbeelden

1 Laat K zijn de verzameling leerlingen van een klas. De ontkenning van de bewering

$\forall x \in \mathrm{K}$: x speelt vandaag voetbal

is gelijkwaardig met

$\exists x \in \mathrm{K}$: x speelt vandaag geen voetbal

2 Noemen we V de verzameling van de Vlamingen. De ontkenning van de bewering

alle Vlamingen drinken bier

is gelijkwaardig met de bewering

er bestaat een Vlaming die geen bier drinkt

Anders:

niet ($\forall x \in V$: x drinkt bier)
dan en slechts dan als
$\exists x \in V$: x drinkt geen bier

3 De ontkenning van de bewering

$\forall x \in \mathbf{Z}: x+3 < 5$

is gelijkwaardig met

$\exists x \in \mathbf{Z}: x+3 \geqq 5$

4 A en B zijn verzamelingen.
De ontkenning van de bewering

$\forall x$: als $x \in A$, dan $x \in B$

is gelijkwaardig met

$\exists x$: $x \in A$ *en* $x \notin B$

Met venndiagrammen:

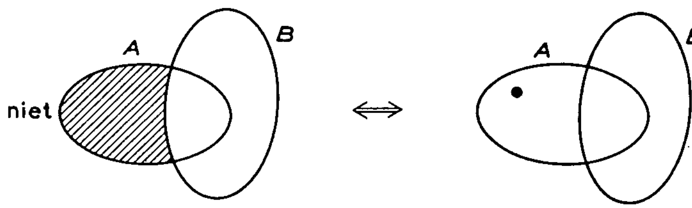


Fig. 1

In deze figuur duidt arcering aan dat het betreffende gebied leeg is. De stip in de rechterfiguur duidt een element van de verzameling A aan.

II Reflexiviteit

Gegeven: een verzameling A en een relatie R in A. Dat wil zeggen R is een verzameling koppels, waarvan het eerste, zowel als het tweede element tot A behoren. Maken we dus een pijlenvoorstelling van R, dan wijzen deze pijlen van een element van A naar een element van A.
We noemen R reflexief in A dan en alleen dan als voor alle x van A geldt dat $(x, x) \in R$.
Bij elk element x moet dan in een pijlenfiguur van de relatie een lus getekend worden.

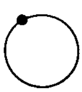


Fig. 2

Wanneer is nu een relatie in A niet reflexief?

R is niet reflexief in A dan en alleen dan als

$\exists x \in A: (x, x) \notin R$

III Symmetrie

Zij R een relatie. R is dus een verzameling koppels.

R is symmetrisch dan en alleen dan als

$\forall x,y: (x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$

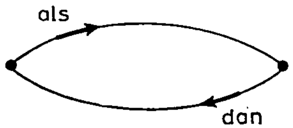


Fig. 3

R is niet symmetrisch dan en alleen dan als

$\exists x,y: (x, y) \in R$ *en* $(y, x) \notin R$

IV Antisymmetrie

R is antisymmetrisch dan en alleen dan als

$\forall x,y: x \neq y$ *en* $(x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \notin R$

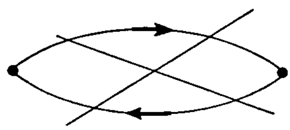


Fig. 4

Wanneer is een relatie nu niet antisymmetrisch?

R is niet antisymmetrisch dan en alleen dan als

$\exists x,y: x \neq y$ *en* $(x, y) \in R$ *en* $(y, x) \in R$

V Transitiviteit

R is transitief dan en alleen dan als

$\forall x, y, z: (x, y) \in R$ *en* $(y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$

Wanneer is de relatie niet transitief?

R is niet transitief dan en alleen dan als

$\exists x, y, z: (x, y) \in R$ *en* $(y, z) \in R$ *en* $(x, z) \notin R$

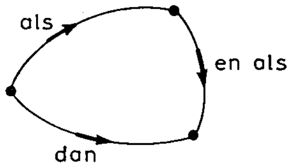


Fig. 5

VI Vraagstukjes

1 Is de relatie $R = \{(0, 7), (7, 0), (0, 0), (4, 4), (2, 1), (1, 2), (1, 1), (6, 1), (6, 6)\}$ reflexief in $\{7, 0, 4, 2, 1, 6\}$?

2 Wat is de kleinste reflexieve relatie in $\{7, 0, 4, 2, 1, 6\}$ die de relatie R van opgave 1 omvat?

3 Is de relatie $R = \{(1, 2), (2, 1), (7, 4), (0, 0), (1, 4), (2, 2), (7, 0), (4, 7), (0, 7)\}$ symmetrisch?

4 Wat is de kleinste symmetrische relatie die de relatie R uit opgave 3 omvat?

5 Is de relatie $R = \{(1, 2), (1, 3), (0, 2), (4, 3), (3, 1), (1, 1), (4, 4)\}$ antisymmetrisch?

6 Is er een antisymmetrische relatie die de relatie R van opgave 5 omvat?

7 Is er een relatie die tegelijkertijd symmetrisch en antisymmetrisch is?

8 Noteer alle relaties in $\{5, 0, 6\}$ die tegelijk symmetrisch en antisymmetrisch zijn.

9 Zij E een verzameling. Noem $\mathscr{P}$E de verzameling van de deelverzamelingen van E.
Te bewijzen: het kardinaalgetal van de verzameling van de relaties in E die tegelijk symmetrisch en antisymmetrisch zijn is gelijk aan het kardinaalgetal van $\mathscr{P}$E.

10 Is de relatie $R = \{(1, 2), (2, 1)\}$ transitief?

VII Enkele oplossingen

1 Neen, want $(2, 2) \notin R$.

2 $R \cup \{(2, 2), (7, 7)\}$

3 Neen, want $(1, 4) \in R$ en $(4, 1) \notin R$

4 $R \cup \{(4, 1)\}$

5 Neen, want $(1, 3) \in R$ en $(3, 1) \in R$

6 Neen, want het in 5 genoemde kan door een omvattende relatie niet teniet gedaan worden.

7 Zij R een relatie die tegelijk symmetrisch en antisymmetrisch is. Als $(x, y) \in R$, dan hebben we wegens de symmetrie van R

$$(y, x) \in R$$

Nu is R antisymmetrisch wanneer

$$\forall x,y\colon x \neq y \text{ en } (x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \notin R$$

R kan dus alleen symmetrisch en antisymmetrisch zijn als voor elk van zijn koppels geldt: $x = y$.
Elke relatie die tegelijk symmetrisch en antisymmetrisch is, is dus een verzameling identieke koppels. Zijn pijlenvoorstelling bestaat alleen uit lussen.

8 Er bestaan juist 8 relaties in $\{5, 0, 6\}$ die tegelijk symmetrisch en antisymmetrisch zijn:

ϕ
$\{(5, 5)\}$
$\{(0, 0)\}$
$\{(6, 6)\}$
$\{(5, 5), (0, 0)\}$
$\{(5, 5), (6, 6)\}$
$\{(0, 0), (6, 6)\}$
$\{(5, 5), (0, 0), (6, 6)\}$

9 Het aantal deelverzamelingen van een verzameling met kardinaalgetal n bedraagt 2^n. Het blijkt gemakkelijk dat dit ook het kardinaalgetal is van de verzameling relaties in E die tegelijk symmetrisch en antisymmetrisch zijn.

10 Neen, want als deze transitief was, dan zou uit $(1, 2) \in R$ en $(2, 1) \in R$ moeten volgen $(1, 1) \in R$.

Kalender

do 13 en vr 14 augustus: Vakantiecursus van het MC; 'Computer en onderwijs', zie dit nummer.
17 t/m 21 augustus: Internationale Postuniversitaire cursussen te Gent: zie juninummer.
24 t/m 28 augustus: IFIP World conference on Computer Education te Amsterdam.
1 t/m 10 september: Internationaal Wiskundig Congres te Nice, Frankrijk.
do 3 t/m za 5 september: Heroriënteringscursus Meetkunde met vectoren voor vwo-leraren, georganiseerd door de CMLW te Groningen.
za 5 september: Ned. Ver. van Wisk. Leraren: Bijeenkomst over Eindexamens te Utrecht, zie dit nummer.

Korrel CLXI

Wat zou Leibniz hier van zeggen?

Welke hoogleraar het onderstaande onlangs geschreven heeft en waar het gepubliceerd is, doet niet ter zake [1]. Wel van belang is, dat eruit blijkt, hoe fataal het kan zijn, als α-abituriënten zonder inzicht in wiskunde de wetenschappelijke samenleving ingaan.

Voordat geschetst wordt hoe Leibniz' monadenleer de thema's continuïteit, ondeelbaarheid en oneindigheid aan elkaar verbindt, dient zijn ontwerp van differentiaal- en integraalrekening vermeld te worden. Deze gaf een algebraïsche oplossing aan het vraagstuk van de ruimtelijke onmeetbaarheid, het incommensurable, zoals dat reeds in de geometrie van de Oudheid naar voren kwam en waarvan de schuin opstaande zijde of hypothenusa[2] van een rechthoekige driehoek een der vele voorbeelden vormde: deze heeft ongetwijfeld een vaste, mathematische verhouding tot de beide andere zijden, echter zonder dat men er ooit in slaagt ook maar heel kleine lijnstukjes van de ene zijde op de andere zodanig af te passen dat zij elkaar geheel dekken (de hypothenusa c is: $\sqrt{a+b}$).[3] In 1635 had de wiskundige Cavalieri, bepaalde pogingen tot oplossing uit de Oudheid weer opnemend, een 'methode van het ondeelbare' gepubliceerd, waarbij hij van louter gedachte, oneindig dunne, ondeelbare lichamen (indivisibilia) uitging. Ten tijde van Leibniz ontwierp ook Newton een poging tot oplossing van dit vraagstuk der incommensurabele grootten. Leibniz' differentiaal- en integraalrekening bood echter de fraaiste algebraïsche middelen om oneindig kleine grootten te hanteren. Het oneindige blijkt binnen de overzichtelijkheid en afsluitbaarheid van algebraïsche operaties gevat te kunnen worden. Een bekend voorbeeld is de eindeloze reeks '$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots=1$'. Ook de continuïteit van de grafische voorstelling van zulk een reeks (een lijn die in het oneindige doorgetrokken steeds meer een reeds uitgezette lijn benadert) hangt hiermede samen.

P.G.J. Vredenduin

[1] We menen dat de lezers het wel mogen weten: Prof. Dr. C. A. van Peursen, Leibniz, Baarn, 1965 (Red).

[2] Geen drukfout!

[3] Geen drukfout!

Een „bezemklas"?

De wiskundeleraren van het Pius X Lyceum te Amsterdam verzochten ons een brief te publiceren, die ze op 20 mei 1970 zonden aan het bestuur van hun school.
Omdat het hier een probleem betreft, dat alle wiskundedocenten zal nopen een oplossing te zoeken meenden we aan dit verzoek te moeten voldoen.
Wel zouden we het op prijs stellen aan het eind van het volgende cursusjaar een verslag te krijgen van de docenten, die met dit probleem te maken hadden. Ze kunnen dan misschien vertellen hoe het hen met de doublerende derdeklassers is vergaan, of de uren die ze uit de 'pot' van 80 beschikbaar gestelde extra uren mochten gebruiken, voldoende waren. Ook welke manier van bijwerken ze hebben toegepast, welke moeilijkheden ze verwachten met de doublerende vierdeklassers, enz. (Red.)

Afschrift van de brief

Aan het Bestuur van het Pius X Lyceum, ter kennisneming aan de Directie en de Oudervereniging van het Pius X Lyceum.

Geacht Bestuur,

De wiskundeleraren van het Pius X Lyceum, in vergadering bijeen op 30 april 1970, brengen onder Uw aandacht dat:

1 Met ingang van augustus 1968 het programma voor wiskunde V.W.O. en H.A.V.O. drastisch is gemoderniseerd.

2 Deze modernisering zich niet alleen uitstrekt over wijze van behandeling van de stof, maar dat er ook een groot aantal nieuwe onderwerpen ter sprake komt.

3 De leerlingen van de huidige derde klassen drie jaren wiskundeonderwijs hebben gehad volgens het oude programma.

4 De derde-klas-leerlingen, die zullen doubleren, van het oude wiskundeprogramma moeten overstappen naar het gemoderniseerde wiskundeprogramma.

5 Deze leerlingen gedwongen worden in één jaar de gemoderniseerde wiskundestof van *drie* jaar door te werken.

6 Deze dwang ontstaat doordat het Ministerie van Onderwijs en Wetenschappen geweigerd heeft de doublerende leerlingen nog een jaar het oude wiskundeprogramma te laten volgen (zg. 'bezemklas').

7 Het ministerie als 'oplossing' ziet het toekennen van tachtig (80) extra lesuren voor *alle* vakken tezamen, per afdeling, per jaar.

8 Zelfs indien deze tachtig uren uitsluitend als extra wiskunde-uren gebruikt zouden worden, het voor het grootste deel der leerlingen een volslagen onmogelijkheid is de stof, die normaliter in *drie* jaren behandeld wordt, nu in één jaar te verwerken.

9 Zij van mening zijn dat de leerlingen de dupe worden van de door het ministerie gekozen 'oplossing'.

10 Zij *daarom de verantwoording voor de gang van zaken niet kunnen aanvaarden.*

Hoogachtend,

Drs. J. G. E. M. Backus — B. H. Geurts
P. N. W. Heideman — J. Soons
Drs. A. Stobbelaar — G. W. F. C. Verwey

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

WISKOBAS

De Nederlandse vereniging van wiskundeleraren zal in de herfst vier voorlichtingsbijeenkomsten organiseren over het Wiskobasproject (moderne wiskunde op de basisschool; zie Euclides, sept. 1969, p. 34) waar alle belangstellenden welkom zijn. Als sprekers zullen optreden de heren Wijdeveld en Goffree.
De bijeenkomsten worden gehouden op 9 oktober te Meppel, 16 oktober te Eindhoven, 30 oktober te Haarlem en 6 november te Breda, alle van 16 uur tot ongeveer 20.30 uur.
Nadere berichten volgen.

EINDEXAMENS wiskunde 1970 (experimenten)

De Nederlandse vereniging van wiskundeleraren zal in samenwerking met de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde op zaterdag 5 september a.s. van 14 tot 17 uur in het Transitorium van het Universiteitscentrum de Uithof te Utrecht een forumbijeenkomst houden over het nieuwe leerplan wiskunde voor vwo en mavo. Aan de hand van de experiment-eindexamens zal in twee bijeenkomsten (één voor vwo en één voor mavo-3 en -4) een bespreking van de nieuwe eindexamenprogramma's plaatsvinden.
Het bestuur van de vereniging nodigt al haar leden en andere belangstellende docenten-wiskunde voor deze bijeenkomst uit. Om 13.40 uur vertrekt een extra bus van het Centraal Station te Utrecht naar de Uithof.

Vakantiecursus 1970

voor leraren V.H.M.O. in de exacte vakken en andere belangstellenden.

Door het Mathematisch Centrum wordt wederom een vakantiecursus voor leraren in de exacte vakken en andere belangstellenden georganiseerd en wel *uitsluitend* in Eindhoven op
donderdag 13 *en vrijdag* 14 *augustus* 1970
Motto: '*Computer en onderwijs*'

PROGRAMMA:

1e dag:

voordrachten door Prof. dr. ir. A. J. W. Duijvesteijn (T.H. Twente) en Prof. dr. D. H. Wolbers (T.H. Delft)
onderwerpen worden nog nader bekend gemaakt.

2e dag:

inleidingen en demonstraties op het gebied van computers door medewerkers van Philips N.V.

Kosten: *f* 5,— per persoon, in welk bedrag zijn begrepen de kosten van de te verstrekken syllabus.

Aanmelding: Schriftelijk bij het secretariaat van het Mathematisch Centrum, 2e Boerhaavestraat 49, Amsterdam-O, tel. 020-947272, alwaar men ook nadere inlichtingen kan verkrijgen omtrent plaats en tijd van aanvang, alsmede omtrent de te verstrekken reisvergoeding (uitsluitend voor leraren V.H.M.O.).
Na aanmelding krijgt men het volledige programma tijdig toegestuurd.

Boekbespreking

M. Kindt, drs. A. J. Th. Maassen, ir. H. P. Smit, *Moderne wiskundecursus voor het havo*, eerste deel–tweede klas, L. C. G. Malmberg, 's-Hertogenbosch, 1969, 152 blz., *f* 7,75.

In zeven hoofdstukken wordt achtereenvolgens behandeld: *Uitbreiding van de verzamelingenleer*, *verzameling* **R**, *vergelijkingen en ongelijkheden in* **R**, *puntverzamelingen*, *relaties* (lineaire relaties, stelsels van twee eerstegraadsvergelijkingen in twee variabelen), *oppervlakte* (als maat op een klasse van puntverzamelingen), *vierkantswortels* (ook rekentechnieken met wortelvormen).
Algebra en meetkunde worden geïntegreerd behandeld. Translatie en parallelprojectie voeren tot som en produkt van de reële getallen, met behulp van de met parallelprojectie ingevoerde vermenigvuldiging wordt bewezen dat de grafiek van $\{(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} : 2x = y\}$ een rechte lijn is.
Punten in de meetkunde worden met kleine letters aangeduid, puntverzamelingen met hoofdletters. Lijnstuk *ab* krijgt als symbool $[a; b]$; toch staat bij de stelling van Pythagoras $a^2+b^2 = c^2$.
De rekenwetten in **R** worden alleen maar vermeld, 'omdat sommige van deze bewijzen nogal wat meetkundige voorkennis vereisen'. De meetkundige behandeling van de reële getallen in hoofdstuk twee en de afleiding van de vierkantswortels uit de wortels van de vierkantsvergelijking in hoofdstuk zeven zouden volgens mij meer geïntegreerd behandeld kunnen worden. Uniformering in het gebruik van de symbolen is in Nederland nog niet tot stand gekomen.

Voor de leerlingen die in het derde leerjaar het zgn. uitgebreide wiskunde-programma gaan volgen, zijn tal van opgaven op een grijs fond gedrukt.
Een goed verzorgde uitgave en een goede poging om de vernieuwing van het wiskunde-onderwijs te bevorderen.

W. Th. Camps

Dr. P. M. van Hiele, Ir. K. Kok, H. N. Schuring, *Van A tot Z, Werkboek der wiskunde voor de tweede klas mavo-havo, deel H-2c*, 1ste halfjaar, J. Muusses N.V. Purmerend, 1969, 102 blz., *f* 7,50.

Dit deel verschijnt naast de delen M⁴H-2c en M⁴H-2b voor die leerlingen van de tweede klas Mavo, die nog aansluiting proberen te zoeken bij de derde klas Havo (op de band staat: voor het Havo; op het titelblad: voor Mavo-Havo; bovendien lijken me de woorden '1ste halfjaar' te moeten vervallen).
Een werkboek uit een serie boeken voor grotere scholen (scholengemeenschappen) met heterogene klassen, waar de leerlingen gedurende een meerjarige brugperiode meerdere keren de gelegenheid krijgen om van het ene niveau naar het andere niveau te switchen (middenschool met niveaudifferentiatie per vak?).
Wie de reeds verschenen delen kent, zal ook nu weer de specifieke aanpak en de systematische opbouw terugvinden. De aansluiting die met dit deel beoogd wordt, lijkt me gewaarborgd.

W. Th. Camps

Vraagstukkenverzameling voor mavo en havo, uitgegeven in opdracht van de drie pedagogische centra: Christelijk Pedagogisch Studiecentrum, Katholiek Pedagogisch Centrum, Onderwijskundig Studie Centrum, J. Muusses N.V. Purmerend, 1970, 77 blz., *f* 5,90.

De leden van de werkgroep voor havo en mavo van de Drie Pedagogische Centra, onder leiding van drs. H. J. Jacobs, hebben gemeend hun werkzaamheden te moeten afsluiten met de samenbundeling van een aantal vraagstukken op experimenteel niveau als handreiking aan de leraren i.v.m. de eerste experimentele, 'moderne' examens voor mavo IV en havo, resp. in 1970 en 1971.
Deze vraagstukkenverzameling bestaat uit:
59 Vraagstukken voor het examen mavo;
120 Vier-keuze vraagstukken voor het examen mavo;
40 Vraagstukken voor het examen havo;
30 Korte vragen voor het examen havo;
50 Vier-keuze vraagstukken voor het examen havo.
Voor mavo III en mavo IV zijn geen afzonderlijke vraagstukken opgenomen; wel is bij deze vraagstukken voor de mavo een opklimming in moeilijkheidsgraad te bespeuren.
Niet alle opgaven zijn origineel.
Van perfectie, vooral bij de vier-keuze vraagstukken, hebben de samenstellers moedwillig afgezien. Een goed besluit: meerdere leraren zullen op dit moment daar niet om treuren.
Al mag men uit deze opgaven niet het juiste examenpeil voor de toekomst afleiden, toch zal

deze vraagstukkenbundel in bredere kring dan alleen de experimentele scholen de aandacht trekken.
Deze 'verschijning' is een waardige afsluiting van een nobele inzet bij de vernieuwing van het wiskunde-onderwijs (van de 'oude' mulo) in Nederland.

W. Th. Camps

J. J. Stoker, Differential Geometry, Wiley – Interscience, Pure and applied mathematics, volume XX.

Dit is een dik, duur, maar mooi boek, geschreven door iemand, wiens voornaamste activiteiten zich op het gebied van de analyse afspelen. De schrijver is dus in zekere zin amateur. Zijn belangstelling in de differentiaalmeetkunde is echter gewekt door niemand minder dan Heinz Hopf, van wie hij de heldere, meetkundige schrijfwijze heeft overgenomen. Elke stap in de theorie wordt uitvoerig gemotiveerd. Zo maakt hij bijvoorbeeld het Theorema Egregium van Gauss intuïtief duidelijk door eerst in plaats van gladde oppervlakken polyeders te bekijken. Het boek is geschikt voor ieder die een elementaire kennis van de analyse heeft. De inhoud beperkt zich tot de gebruikelijke onderwerpen, zoals uit de navolgende opsomming van de hoofdstukken moge blijken. 1. Operations with Vectors. 2. Plane Curves. 3. Space Curves. 4. The basic elements of Surface Theory. 5. Some Special Surfaces. 6. The Partial Differential Equations of Surface Theory. 7. Inner Differential Geometry in the Small from the Extrinsic Point of View. 8. Differential Geometry in the Large. 9. Intrinsic Differential Geometry of Manifolds, Relativity. 10. The Wedge Product and the Exterior Derivative of Differential Forms, with Applications to Surface Theory.
In een appendix worden de benodigde stellingen over gewone en partiële differentiaalvergelijkingen bewezen. Tot slot zij opgemerkt, dat elk hoofdstuk besloten wordt door een stel voortreffelijke opgaven.

J. Simonis

Roy Dubisch, Vernon E. Howes. *Intermediate Algebra, second edition.* 345 blz. 65/-, John Wiley and Sons, inc. London 1967.

In 1960 verscheen van dit mooi uitgevoerde, maar dure boekwerk de eerste druk. De inhoud komt ongeveer overeen met de leerstof in onze eerste drie leerjaren van het voortgezet onderwijs, verrijkt met enkele onderwerpen zoals 2×2 matrices, determinanten en een zeer summiere inleiding in de complexe getallen op basis van de matrix-algebra.
In een voorwoord zeggen de schrijvers dat t.o.v. de eerste uitgave enkele wijzigingen zijn aangebracht, waaronder het gebruik van de verzamelingentaal. Maar het begrip 'functie' wordt als volgt gedefinieerd: A function f is a rule which associates every permissable choice of a number x a unique number,y. Then we say y is a function of x and write $y = f(x)$.
Ik geloof niet dat het boek voor ons land in een behoefte voorziet.

J. J. Wouters.

W. T. Fishback, *Projective and Euclidean Geometry*, John Wiley and Sons Ltd., Chichester 1969, 2e druk, 298 blz. 103/–.

De eerste druk verscheen in 1962 en werd besproken in Euclides, 39e jaargang blz. 158. Het belangrijke verschil is naast een kleine aanvulling in hoofdstuk 8, de splitsing van hoofdstuk 11 in drie afzonderlijke hoofdstukken te weten:
Affine en euclidische meetkunde, hyperbolische meetkunde en elliptische meetkunde.

Burgers

Á. Szabó, *Anfänge der griechischen Mathematik*, R. Oldenbourg, München-Wien, 1969, 494 blz., DM 48.—.

De auteur behandelt drie fundamentele problemen uit de geschiedenis van de Griekse wiskunde tot en met Euclides, nl.

1 het irrationale,
2 de leer der verhoudingen,
3 de leer van het bewijs.

De schrijver is van huis uit klassiek filoloog. Dat merkt men duidelijk aan de manier, waarop hij de problemen benadert. Zijn methode bestaat daarin, dat hij nagaat hoe en waar bepaalde karakteristieke termen in de Griekse wiskundige en filosofische literatuur voorkomen en daaruit conclusies trekt. Zo speelt in zijn onderzoek betreffende het irrationale de term kwadreren een centrale rol. Hij komt tot de conclusie, dat het niet gerechtvaardigd is Theodorus en Theaetetus te beschouwen als degenen, die het eerst de onmeetbaarheid van wortels bewezen hebben.
In het tweede deel wordt de redentheorie van Eudoxus even aangeraakt. Er wordt echter niet op ingegaan en al gauw beperkt de schrijver zich tot verhoudingen van natuurlijke getallen en de achtergronden daarvan in de muziekleer.
In deel 3 onderzoekt hij de betekenis in het Grieks van het woord bewijs en vindt, dat deze term oorspronkelijk betekend heeft: tonen, zichtbaar maken. Op filologische gronden concludeert hij nu, dat het bewijzen zijn oorsprong gehad heeft in een aanschouwelijk duidelijk maken van een bepaalde eigenschap. In concreto ziet men hier zijn werkwijze gedemonstreerd. Wat hij verder over bewijzen zegt, is m.i. nogal speculatief. Volgens hem heeft het abstracte bewijzen zich uit het aanschouwelijk maken ontwikkeld daar, waar de aanschouwing de mens in de steek liet, nl. bij de fundering van het irrationale. Het eerste irrationaliteitsbewijs is een indirect bewijs. De indirecte bewijsmethode treedt in de Griekse literatuur voor het eerst op bij de Eleaten en heeft daar een anti-empirisch doel, nl. het niet-essentiële van de verschijningsvorm aan te tonen. Het is dus geen wonder, dat het ook in de wiskunde optreedt, zodra het erom gaat resultaten te bereiken, die niet meer zich aanschouwelijk funderen laten. De schrijver tracht dit uitvoerig toe te lichten. Toch kan ik mij niet aan de indruk onttrekken, dat zijn betoog een min of meer geconstrueerd karakter heeft.
Het boek is van belang voor hen, die geïnteresseerd zijn in detailstudie betreffende de Griekse wiskunde.

P. G. J. Vredenduin

A. J. G. Klomp en drs. Joh. Runhaar, *Hogere wiskunde* 2, Nijgh en van Ditmar, 's-Gravenhage, 1969, 186 blz., *f* 23,75.

Bovenstaande uitgave is een verzameling vraagstukken bedoeld voor studenten aan een H.T.S. Na een korte samenvatting van de nodige theorie, i.h.a. niet van uitgewerkte bewijzen voorzien volgen dan telkens een serie van aangepaste opgaven, afgewisseld met herhalingsopgaven. Naast limietstellingen, functies van een of meer variabelen, vindt men oneigenlijke integralen, partiële afgeleiden, meervoudige integralen, differentiaalvergelijkingen (gesplitst in verschillende typen) rijen en convergentie-kenmerken, reeksontwikkelingen volgens Taylor en McLaurin, fourierreeksen, laplace-transformaties, numerieke benaderingsmethoden, vectoranalyse, matrix-rekening en determinanten. De uitvoering is voortreffelijk.

Burgers

Eindrapport Werkgroep HAVO-MAVO

Begin 1965 heeft de coördinatie-commissie van de Pedagogische Centra V.H.M.O. een aantal personen uitgenodigd een werkgroep te vormen ten einde een leerplan wiskunde voor het havo te ontwerpen.
Voorzitter werd de heer drs. H. J. Jacobs jr., secretaris de heer E. H. Schmidt. De overige leden van de werkgroep waren de heren drs. Chr. Boermeester, ir. L. F. Cooke, W. J. Kniep, G. Krooshof, D. Leujes en R. Troelstra.
De heer Cooke heeft aan geen enkele bespreking deelgenomen, in een aantal vergaderingen heeft hij zich laten vertegenwoordigen. Daardoor is in de periode dat de werkgroep zich bezig hield met de bovenbouw van het havo toch de stem van het hoger technisch onderwijs gehoord, dank zij de medewerking van de heren drs. H. Brouwer en ir. Tönjes, van wie de laatste zich na één vergadering liet vervangen door de heer G. L. Pieterse. De commissie heeft achtentwintig vergaderingen gehouden, de eerste op 13 mei 1965 en de laatste op 11 september 1969. Van de zesde vergadering af nam de heer drs. B. J. Westerhof aan de besprekingen deel.
Toen de werkgroep haar bemoeienissen ook tot het mavo uitstrekte werd de werkgroep uitgebreid met drie nieuwe leden, mej. H. J. Dengerink en de heren E. van Efferink en L. A. G. M. Muskens.
In 1966 werd een interimrapport over de werkzaamheden van de werkgroep aan de Pedagogische Centra aangeboden. Tegelijk met een door de werkgroep samengesteld rapport 'Wiskunde in de bovenbouw van het havo' is dit in 1967 in Euclides gepubliceerd (blz. 33–48).
Toen de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde in 1966 haar bemoeienissen tot havo en mavo uitstrekte, besloot de werkgroep de resultaten van haar voorbereidend werk, mede door persoonlijke vertegenwoordiging, in de werkgroepen van deze Commissie in te brengen. Daar de opstelling van een leerplan voor de bovenbouw van het havo nog niet direct door de C.M.L.W. tot uitvoering zou worden gebracht, publiceerde de werkgroep bovenvermeld rapport.
Om aan het leerplan inhoud te geven en tevens te komen tot een voorlopige niveaubepaling van de eindexamens, besloot de werkgroep een vraagstukkenverzameling voor havo en mavo samen te stellen. Nu dit werk is voltooid, meent de werkgroep haar opdracht te hebben vervuld.
Mede door haar werk werd de invoering van een nieuw programma in de scholen bevorderd. Daar zij veel van haar ideeën herkende in de Schotse wiskundemethode 'Modern Mathematics for Schools' heeft zij de verschijning van deze methode in een Nederlandse bewerking, reeds in 1966, gestimuleerd. Doordat een aantal scholen met deze methode experimenteerde, werd ervaring opgedaan, waarvan bij de invoering van het nieuwe leerplan in 1968 kon worden geprofiteerd. Dat examens volgens een alternatief (modern) programma mavo-3, mavo-4 en havo reeds resp. in 1969, 1970 en 1971 konden of kunnen worden afgenomen is mogelijk mede dank zij het voorbereidende werk van de werkgroep.
Doordat de Pedagogische Centra, door instelling van de werkgroep, in regelmatige besprekingen bijeenbrachten een groep personen, ten nauwste betrokken bij de vernieuwing van het wiskunde-onderwijs in havo- en mavo-scholen, hebben de Pedagogische Centra in belangrijke mate bijgedragen tot deze vernieuwing.

De voorzitter,
drs. H. J. Jacobs jr.

de secretaris,
E. H. Schmidt

Didactische literatuur

uit Buitenlandse Tijdschriften

The Mathematics Teacher, LXI⁶–LXII⁶, oktober 1968–oktober 1969.

E. L. Spitznagel, An experimental approach in the teaching of probability;
D. A. Engel, Can space be overtwisted?
D. W. Hight, Functions: dependent variables to fickle pickers;
J. M. Sandura, Research in psychomathematics;
H. F. Fehr, Reorientation in mathematical education.

J. H. Hlavaty, Towards the golden jubilee year-1970;
H. F. Fehr, Mathematical education for a scientific, technological and industrial society;
Th. C. O'Brien and B. J. Shapira, Statistical significance-what?
Th. L. Suaty, On mathematical structures in some problems of politics;
W. D. Reeve, The universability of mathematics;
M. J. Lyng, Factors relating to a teacher's knowledge of contemporary mathematics;
H. C. Kennedy, Giuseppe Peano at the university of Turin;
R. V. Andree, Computers and in-service education.

Th. M. Green and Ch. L. Hamberg, A study of n-dimensional equations, modulo two;
Z. Usiskin, A new approach to the teaching of constructions;
J. H. Jordan, The division and euclidean algorithms in the Gaussian integers;
V. Bhushan e.a., Large-group instruction in mathematics under flexible scheduling;
J. Barit, The lore of number;
J. D. Brown, Music and mathematicians since the seventeenth century;
W. Servais, Present-day problems of mathematical instruction.

R. L. Morton, Simplified procedures for computing federal income tax;
W. K. Vierter, Why not relate the conic sections to the cone?
C. R. Verno, A hunch and a proof;
C. V. Newson, A philosophy for the mathematics teacher;
Hennemann and Geiselmann, Using programmed learning in the classroom;
H. Eves, A geometry capsule concerning the five Platonic solids;
H. F. Fehr, The education of mathematics teachers in other countries;
C. W. Dodge, Guldo Fabini.

H. Frandsen, The last word on solving inequalities;
M. W. Beckmann, Teaching the low achievers in mathematics;
M. Nadler, The demise of analytic geometry;
D. Geddes and S. I. Lipsey, The hasard of sets;
E. R. Matthews, A simple '7'-divisibility rule;
J. Hirsch, Prime triplets;
J. Ayton, A visit to a mathematical shrine (Hamilton, Dublin, 1843);
R. W. Prielipp, Niels Henrik Abel;
Minnesota Council of Teachers, Patterns for professional progress.

Recreatie

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Dr. P. G. J. Vredenduin, Julianaweg 25, Oosterbeek.

241 Voor hoeveel paren natuurlijke getallen geldt:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{6!}\ ?$$

(B. Kootstra)

242 Iemand heeft een serie lootjes genummerd 1, 2, 3, . . ., 600. Hij wil daaruit een deelserie kiezen

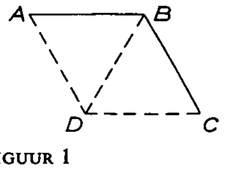
$$p, p+1, p+2, \ldots, q \qquad (p \neq q)$$

zó, dat de som van de getallen van de deelserie deelbaar is door 600. Dit lukt hem gemakkelijk, en zelfs op verschillende manieren. Op hoeveel manieren?
Lukt het hem voor iedere n een deelserie uit 1, 2, . . ., n te kiezen zo, dat de som van de getallen daarvan deelbaar is door n? Zo neen, voor welke waarden van n lukt het niet?

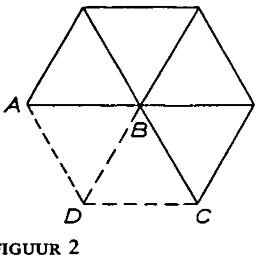
243 In opgave 239 werd gevraagd 8 bomen zo te plaatsen, dat zoveel mogelijk onderlinge afstanden aan elkaar gelijk worden. Ik bewees, dat het aantal gelijke afstanden maximaal 14 is en meende, dat dit bewijs, althans voor een zo gering aantal bomen, waterdicht was. De gewoonte getrouw zond ik de opgave aan de heer Kootstra. Per kerende post kreeg ik van hem een figuur, waarin 8 bomen zo geplaatst waren, dat 14 afstanden gelijk zijn. Maar zijn figuur was geheel verschillend van de mijne en er bleek uit, dat mijn bewijs verre van waterdicht was. Kunt u ook door een dergelijke figuur de ondeugdelijkheid van mijn bewijs aantonen?
De heer Kootstra voegde er nog aan toe: plaats 9 bomen zo, dat 18 afstanden gelijk worden.

Oplossingen

239 We moeten een serie gelijkzijdige driehoeken vormen, waarvan de 8 bomen de hoekpunten zijn. De eerste 3 bomen leveren een gelijkzijdige driehoek. Bij elke volgende boom kunnen we er een gelijkzijdige driehoek bijmaken. We krijgen zo $3+5\cdot 2 = 13$ gelijke afstanden.
De enige mogelijkheid hier bovenuit te komen zou zijn, dat op een gegeven ogenblik een situatie ontstaat, waarbij door het bijplanten van een boom twee (of meer) nieuwe gelijkzijdige driehoeken ontstaan. Daar we slechts 8 bomen hebben, is de enige mogelijkheid die, waarin de situatie van figuur 1 ontstaan is: $\angle ABC = 120°$ en het bijplaatsen van een boom in D levert nu een bijdrage van niet 2, maar 3 nieuwe gelijke afstanden. Inderdaad is het mogelijk de situatie van figuur 1 te verkrijgen. In figuur 2 ziet men, hoe dit kan. Men ziet een regelmatige zeshoek ontstaan met B als middelpunt. Nu kan de achtste boom nog zo geplant worden, dat een nieuwe gelijkzijdige driehoek ontstaat. In totaal wordt het aantal gelijke afstanden dan 14. Uit de gevolgde redenering zien we, dat 14 het maximum is.



FIGUUR 1



FIGUUR 2

240 $\frac{2}{5} = \frac{26}{65} = \frac{266}{665} = \frac{2666}{6665} = \ldots .$

Vind alle dergelijke breuken.
We lossen op de onbepaalde vergelijking

$$\frac{a}{c} = \frac{10a+b}{10b+c} \quad (a, b, c < 10, a \neq b).$$

De vergelijking is gelijkwaardig met

$$10ab = c\,(9a+b).$$

Stel $a = 1$. We vinden dan $b = 6$, $c = 4$ of $b = 9$, $c = 5$.

Zo doorgaande vinden we nog:

$a = 2, b = 6, c = 5$
$a = 4, b = 9, c = 8.$

De verdere mogelijkheden blijken te zijn:

$$\frac{1}{4} = \frac{16}{64} = \frac{166}{664} = \frac{1666}{6664} = \ldots$$
$$\frac{1}{5} = \frac{19}{95} = \frac{199}{995} = \frac{1999}{9995} = \ldots$$
$$\frac{4}{8} = \frac{49}{98} = \frac{499}{998} = \frac{4999}{9998} = \ldots .$$

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Contributieverhoging

De penningmeester maakt de leden er op attent dat op de laatste algemene ledenvergadering besloten is de contributie te verhogen tot *f* 15,— in verband met verhoogde abonnementsprijs op Euclides en andere kosten. Voor leden die Euclides op andere wijze ontvangen zal de contributie *f* 8,— gaan bedragen.
Reeds nu kan de contributie voor het komende verenigingsjaar worden gestort of overgemaakt op giro 143917 t.n.v. Ned. Ver. v. Wiskundeleraren, te Amsterdam.

Inhoud